Vorkurs Mathematik

Gleichungen lösen

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

Äquivalenzumformungen

Mit Äquivalenzumformungen kann man Gleichungen umwandeln, ohne deren Lösungsmenge zu verändern.

Wichtige Beispiele:

- Vertauschen der Gleichungsseiten: $a = b \iff b = a$
- addieren/subtrahieren:

$$a = b \iff a \pm c = b \pm c$$

- multiplizieren/dividieren mit $c \neq 0$ (c darf nicht Null sein):

$$a = b \iff ac = bc \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Achtung: Potenzieren (insbesondere Quadrieren) und Wurzelziehen sind keine Äquivalenzumformungen.

Gleichungen lösen / Nullstellen von Funktionen

Durch Subtraktion einer Gleichungsseite läßt sich jede Gleichung in einer Unbekannten in die äquivalente Form $f(x) = 0$ überführen. Beispiel:

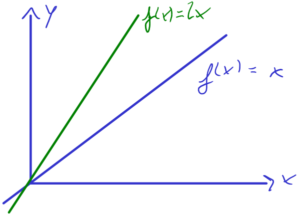
$$3x + 4 = 5 \Longleftrightarrow 3x - 1 = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$$

mit $f(x) = 3x - 1$. Somit kann man jeder Gleichung auf natürliche Art und Weise eine Funktion zuordnen. Wichtige Folgerung:

Die Lösungen einer Gleichung sind genau die Nullstellen der zugeordneten Funktion.

Dies kann man oft ausnutzen, um anhand der Funktion Aussagen über die Lösungsmenge zu treffen.

Lineare Gleichungen



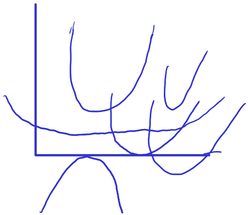
- allgemeine Form: $ax + b = 0$
- zugehörige Funktion: Gerade ($f(x) = ax + b$)
- Lösungen: Genau eine, nämlich $x = -\frac{b}{a}$ (dort schneidet die Gerade die x-Achse)

$$3x + 2 = 5 \quad | -2$$

$$3x = 3 \quad | :3$$

$$x = 1$$

Quadratische Gleichungen



- allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$
- zugehörige Funktion: Parabel
- Lösungen: keine, eine oder zwei (Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse)

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine quadratische Gleichung zu lösen.

Lösen quadratischer Gleichungen: pq-Formel

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungen

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Je nachdem, ob der Ausdruck unter der Wurzel negativ, null oder positiv ist, gibt es keine, genau eine oder zwei Lösungen.

Beispiel: $x^2 + 2x - 8 = 0$ $\quad p = 2,\ q = -8$

$$x_\pm = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} - (-8)}$$

$$= -1 \pm \sqrt{9}$$

$$x = -1 + 3 \quad \vee \quad x = -1 - 3$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -4$$

Lösen quadratischer Gleichungen: quadratische Ergänzung

Idee: $ax^2 + bx + c = 0$ mit Hilfe der ersten binomischen Formel umformen zu $a(x - x_0)^2 + y_0 = 0$. Daraus ergibt sich

$-2(x-1)^2 + 5 = 0$

$$x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{\frac{-y_0}{a}}.$$

Je nachdem, ob der Ausdruck unter der Wurzel negativ, null oder positiv ist, gibt es keine, genau eine oder zwei Lösungen. Beispiel:
$2x^2 - 2x - 12 = 0$

$-2 \cdot \frac{1}{2} x$

$2(x^2 - x - 6) = 0$

$a^2 - 2ab$

$2(x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 6) = 0$

$2((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6) = 0$

$2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{2} = 0$

$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$

$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$

$x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x = -2 \vee x = 3$

Lösen von Polynomgleichungen

Was macht man, wenn die Variable mit einer höheren Potenz vorkommt, wie z.B. $x^5 - x - 1 = 0$? Zwei Techniken, die manchmal helfen:

- Faktorisieren: Beispiel $x^3 + 2x^2 + x = 0$

$$x(x^2+2x+1) = 0$$
$$x\,(x+1)^2 = 0$$

Substitution

$$u = x^2 \quad (\Rightarrow u^2 = x^4)$$

- Substituieren: Beispiel $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$
$$u = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vee u = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad u = 2 \quad \vee u = 1$$

Generell: Bis zum Grad vier gibt es (komplizierte) Lösungsformeln, ab Grad füunf nicht mehr.

Rücksubstitution:

$$x^2 = 2 \qquad x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{2} \qquad x = \pm 1$$

Lösen von Wurzelgleichungen

$$x+2-\sqrt{4-x}=0$$

Bei Wurzelgleichungen steht die Variable unter einer oder mehreren Wurzeln (und evtl. zusätzlich auch noch außerhalb). Regel zum Lösen solcher Gleichungen:

- Wurzel auf einer Seite der Gleichung isolieren
- Quadrieren (hier können Scheinlösungen hinzukommen)
- die ersten beiden Schritte so lange wiederholen, bis alle Wurzeln eliminiert sind
- entstandene wurzelfreie Gleichung lösen
- Probe (um Scheinlösungen zu eliminieren)

Lösen von Betragsgleichungen

Kommt in einer Gleichung ein Betrag vor, kann dieser durch eine Fallunterscheidung eliminiert werden. Die sich ergebenden betragsfreien Gleichungen können dann oft mit bekannten Methoden gelöst werden.
Beispiel: $|x+5| = 7$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1. Fall: $x+5 \geq 0$:

$$x+5 = 7$$
$$x = 2$$

2. Fall: $x+5 < 0$

$$-(x+5) = 7$$
$$-x-5 = 7$$
$$x = -12$$

Lösungen sind somit $x = 2$ und $x = -12$