Vorkurs Mathematik

Vorlesung 6 - Analytische Geometrie und Matrizen

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Übung

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren:

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 1x_1 & - & 4x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 9x_1 & - & 6x_2 & = & 13 \end{array}$$

Lösung:

(a)
$$\left| \begin{array}{l} 1x_1 - 4x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3 \end{array} \right| /-2\mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1x_1 - 4x_2 = 1 \\ \quad\;\; 6x_2 = 1 \end{array} \right| \Rightarrow x_2 = \frac{1}{6}$$

$$1x_1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$

(b) keine Lösung!

$$\left| \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 9x_1 - 6x_2 = 13 \end{array} \right| /+3\mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 = 5 \\ \qquad\quad 0 = 28 \end{array} \right|$$

geht nicht

Größere lineare Gleichungssysteme lösen

Beobachtungen

- Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn die Reihenfolge der Gleichungen getauscht wird.
- Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn genau eine Zeile (mehrfach) von anderen Zeilen abgezogen wird.

Rechenrezept:

- Überführe das Lineare Gleichungssystem in eine „Dreiecksform“ oder „Stufenform“
- Bestimme anschließend die Lösungsmenge.

Beispiel

Wir bestimmen die eindeutige Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

Lösung: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ -1x_1 & + & 1x_2 & + & 9x_3 & = & -13 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ /-2\mathrm{I} \\ /+\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ & & 1x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & & 4x_2 & + & 6x_3 & = & -10 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ /-4\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I}: & 1x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ \mathrm{II}: & & & 1x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ \mathrm{III}: & & & & & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

III: $\boxed{x_3 = -1}$, II: $1x_2 + (-1) = -2 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

I: $1x_1 + 3\cdot(-1) - 3\cdot(-1) = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$

Übung

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 11x_2 & - & 5x_3 & = & 11 \quad /-3\mathrm{I} \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 14 \quad /-2\mathrm{I} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 1x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ & & -4x_2 & & & = & 4 \quad /+2\mathrm{II} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \mathrm{I}: & 1x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ \mathrm{II}: & & & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ \mathrm{III}: & & & & & 2x_3 & = & -4 \end{array}$$

III: $\boxed{x_3 = -2}$, II: $2x_2 + (-2) = -4 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

I: $1x_1 + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) = 5 \Rightarrow \boxed{x_1 = 4}$

alternativ: Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 11 & -5 & 11 \\ 2 & 2 & -4 & 14 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

...

Ein Beispiel mit unendlich vielen Lösungen

Wir bestimmen die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 1x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & -2 & \\ 1x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 1 & /-\mathrm{I} \\ -2x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & = & -5 & /+2\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 1x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & -2 & \\ & & 1x_2 & - & 2x_3 & = & 3 & \\ & & -3x_2 & + & 6x_3 & = & -9 & /+3\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ & & 1x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ & & \cancel{0x_2} & \cancel{+} & \cancel{0x_3} & \cancel{=} & \cancel{0} \end{array}$$

$$(*)\quad \begin{array}{rcrcl} 1x_1 & - & 5x_2 & = & -2-4x_3 \\ & & 1x_2 & = & 3+2x_3 \end{array}$$

Bsp.: $x_3 = 0$

$$\left| \begin{array}{l} 1x_1 - 5x_2 = -2 \\ 1x_2 = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 13 \\ x_2 = 3 \end{array}$$

Bsp.: $x_3 = 1$

$$\left| \begin{array}{l} 1x_1 - 5x_2 = -6 \\ 1x_2 = 5 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 19 \\ x_2 = 5 \end{array}$$

$\underbrace{x_3}_{\text{freie Variable}}$ $\underbrace{x_1,\ x_2}_{\text{abhängige Variablen}}$

Allgemein: Sei $x_3 = s \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1x_1 - 5x_2 = -2-4s \\ 1x_2 = 3+2s \end{array} \right|$$

$$\text{II:} \quad \boxed{x_2 = 3+2s}$$

$$\text{I:} \quad 1x_1 - 5\cdot(3+2s) = -2-4s$$

$$\Rightarrow x_1 = -2-4s + 5(3+2s)$$

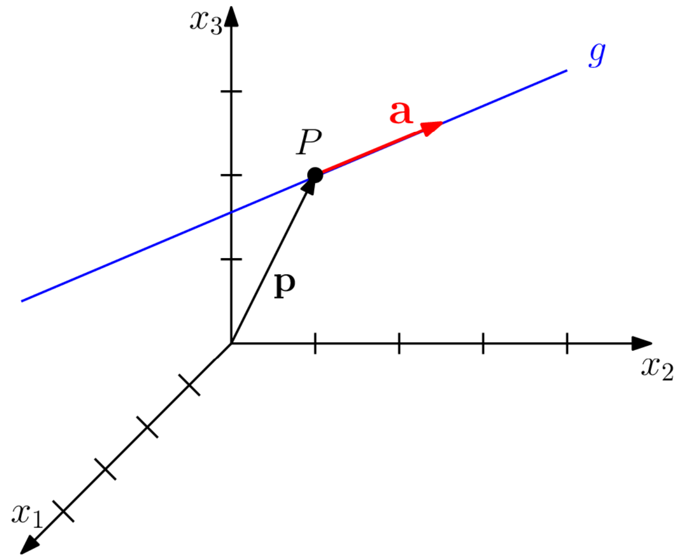
$$\boxed{x_1 = 13 + 6s}$$

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} 13+6s \\ 3+2s \\ s \end{pmatrix}$

Lösungsmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 13+6s \\ 3+2s \\ s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$

Geraden darstellen

Idee: Eine Gerade ist eindeutig festgelegt, wenn wir einen Punkt und die Richtung der Geraden kennen.



Jeder Punkt auf der Geraden g lässt sich von P aus erreichen, indem man ein Vielfaches von a läuft.

Also lässt sich jeder Punkt auf g durch einen Ortsvektor der Form $\mathbf{p}+\lambda$a beschreiben

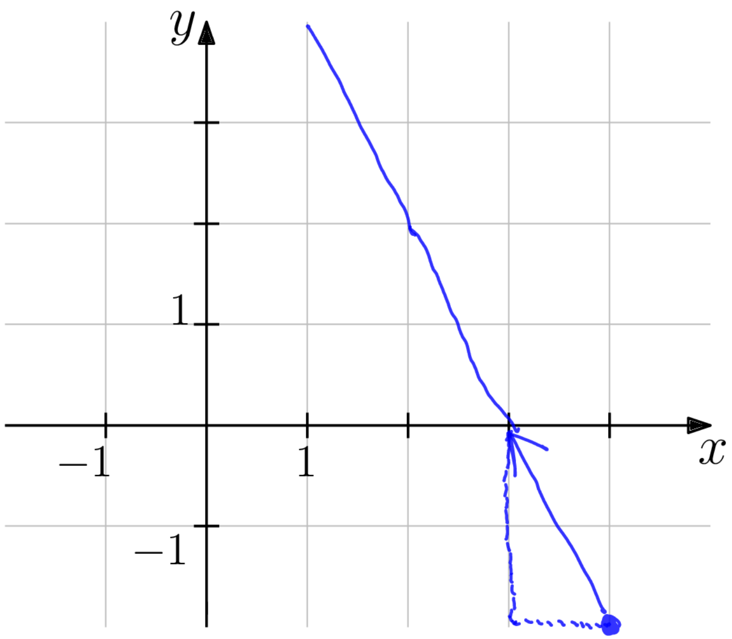
Parameterdarstellung einer Geraden

Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der folgenden Form schreiben:

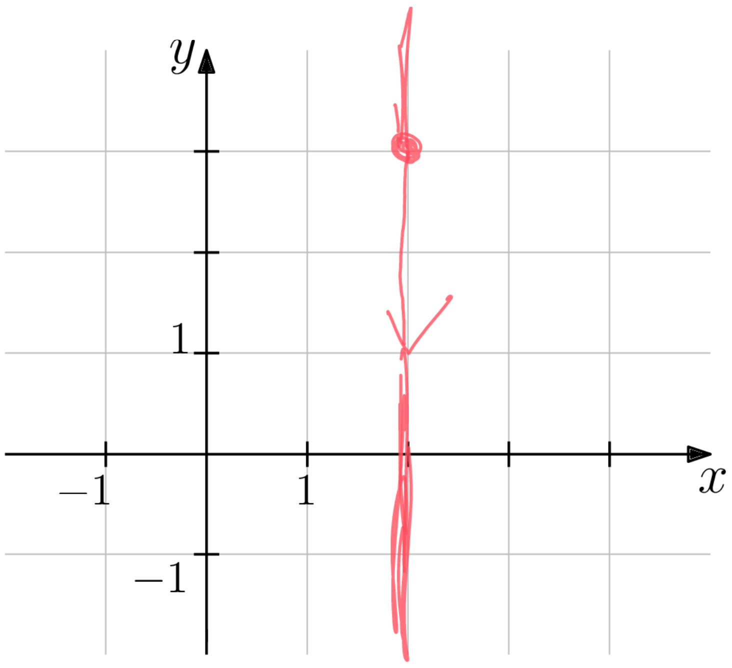
$$g = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \ = \mathbf{p} + \mathsf{Span}(\mathbf{a}),$$

wobei die Punkte auf g durch ihre Ortsvektoren identifiziert werden. Diese Darstellung heißt Parameterform. Dabei repräsentiert $\mathbf{p}$ einen beliebigen Punkt auf g und $\mathbf{a}$ beschreibt die Richtung der Geraden.

Beispiel

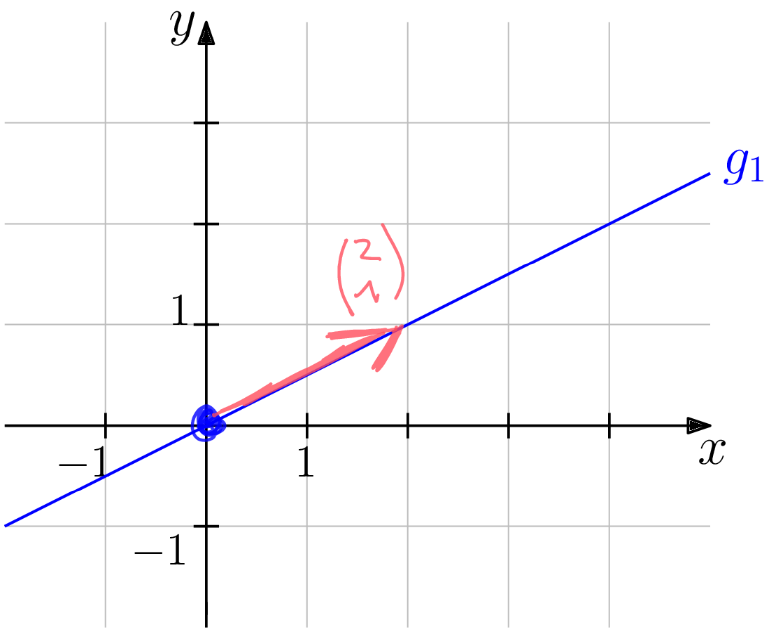


$$g_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{p} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{a} \; : \; r \in \mathbb{R} \right\}$$

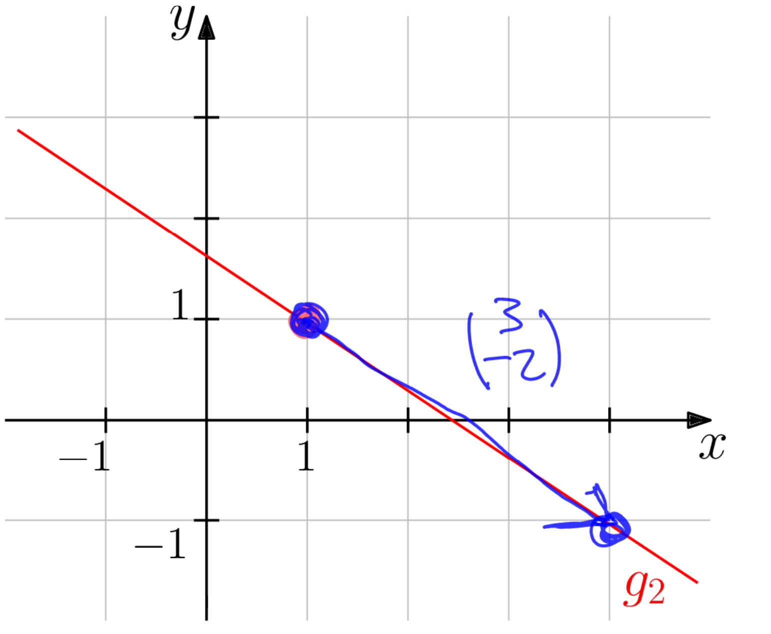


$$g_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{p} + \operatorname{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{a} \right)$$

Beispiel



$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



$$g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Übung

(a) Beschreiben Sie die Gerade g_1, welche durch die Punkte

$$A := (0,1,2) \quad \text{und} \quad B := (-2,7,10)$$

verläuft, mit Hilfe einer Parameterdarstellung.

(b) Beschreiben Sie die Gerade g_2, welche durch die Punkte

$$C := (5,4,-4) \quad \text{und} \quad D := (-1,-5,-1)$$

verläuft, mit Hilfe einer Parameterdarstellung.

(c) Zusatz: Haben die Geraden g_1 und g_2 einen Schnittpunkt? Falls ja, wie lautet dieser?

$$g_1 = \left\{ \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad g_2 = \left\{ \underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Ansatz: $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\-4\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-6\\-9\\3\end{pmatrix}$ $\quad / + \lambda_2 \begin{pmatrix}6\\9\\-3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}6\\9\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\-4\end{pmatrix} \quad / - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}6\\9\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}}$$

$$\left| \begin{array}{l} -2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 5 \\ 6\lambda_1 + 9\lambda_2 = 3 \\ 8\lambda_1 - 3\lambda_2 = -6 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ / + 3\,\mathrm{I} \\ / + 4\,\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{r} -2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 5 \\ 27\lambda_2 = 18 \\ 21\lambda_2 = 14 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ / : 9 \\ / : 7 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{r} -2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 5 \\ 3\lambda_2 = 2 \\ 3\lambda_2 = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ / - \mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{r} -2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 5 \\ 3\lambda_2 = 2 \\ 0 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_2 = 2/3 \\ -2\lambda_1 + 6 \cdot 2/3 = 5 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Schnittpunkt: $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

Lagebeziehungen

Lagebeziehungen für Geraden erkennen

Zwei Geraden g_1 und g_2 seien durch Parameterdarstellungen gegeben:

$$g_1 = \{\mathbf{p}_1 + \lambda_1 \mathbf{r}_1 : \; \lambda_1 \in \mathbb{R}\},$$
$$g_2 = \{\mathbf{p}_2 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 : \; \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Um die Lagebeziehung zu bestimmen, kann man beide Darstellungen gleichsetzen und das resultierende LGS (mit Variablen λ_1, λ_2) lösen:

$$\mathbf{p}_1 + \lambda_1 \mathbf{r}_1 = \mathbf{p}_2 + \lambda_2 \mathbf{r}_2$$

Es gibt vier Fälle:

genau eine Lösung	Schnittpunkt (λ_1 bzw. λ_2 in die Parameterformen einsetzen)
unendlich viele Lösungen	die Geraden sind identisch
keine Lösung (λ_1, λ_2) & $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sind Vielfache voneinander	die Geraden sind parallel, aber nicht identisch
keine Lösung (λ_1, λ_2) & $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sind keine Vielfache	die Geraden sind windschief

Inhalt

1. Analytische Geometrie II
   - Skalarprodukt, Kreuzprodukt
   - Orthogonalität
   - Ebenen beschreiben
   - Lagebeziehungen
2. Matrizen
   - Grundlegende Rechenoperationen
   - Abbildungen der Form $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$

Skalarprodukt, Norm und Winkel

Standard-Skalarprodukt (Definition)

Es seien

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir das (Standard-)Skalarprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ wie folgt:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k \ .$$

Insbesondere lässt sich die Länge $\|\mathbf{v}\|$ von $\mathbf{v}$ (auch Norm genannt) wie folgt beschreiben:

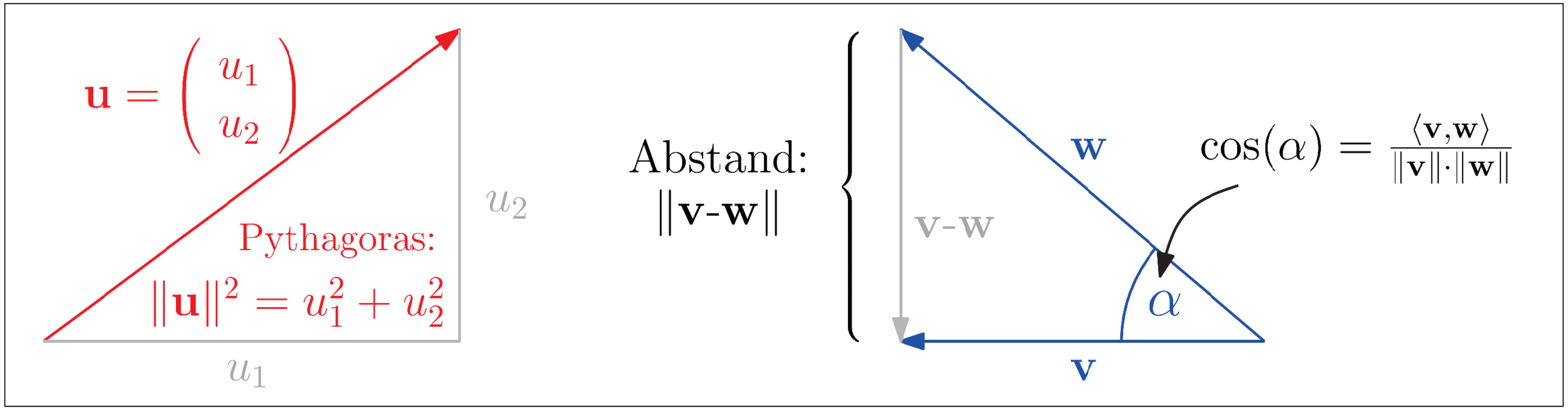
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \ .$$

Skalarprodukt, Norm und Winkel

Länge, Abstand, Winkel

Es seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das Standard-Skalarprodukt und $\| \cdot \|$ bezeichne die Norm. Dann ist

- $\|\mathbf{v}\|$ die Länge des Vektors $\mathbf{v}$,
- $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ der Abstand der Punkte $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$,
- der Winkel α zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ durch $\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}$ gegeben.



Skalarprodukt, Norm und Winkel

Übung: Gegeben seien $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Längen der beiden Vektoren.
(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$.

(a) $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}$

(b) $\cos\alpha = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{\cancel{5}\cdot 5}}{\sqrt{\cancel{5}\cdot 10}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{\alpha = 45^\circ \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right)}$

Formelsammlung

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$
$\sin(x)$			$\frac{1}{\sqrt{2}}$			
$\cos(x)$			$1/\sqrt{2}$			

Skalarprodukt, Norm und Winkel

Übung: Gegeben seien $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Zusatz: Für welchen Wert $x \in \mathbb{R}$ ist der Abstand zwischen

$$\mathbf{u}_x := \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{v}$ am kleinsten?

Lösung: Abstand zw v und u_x $\quad \|v - u_x\|$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2-x \\ x \end{pmatrix} \right\|$$

Wann ist das am kleinsten?

$$= \sqrt{(2-x)^2 + x^2}$$

$$= \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Ableitung

$f(x) = 2x^2 - 4x + 4$

$f'(x) = 4x - 4 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = 1$

quadr. Ergänzung

$2x^2 - 4x + 4$

$= 2(x^2 - 2x + 2)$

$= 2((x-1)^2 + 1)$

für $x = 1$ am kleinsten

Orthogonalität

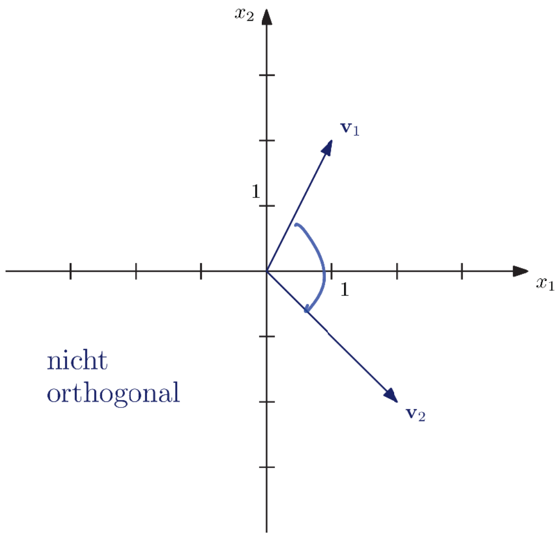
Orthogonalität

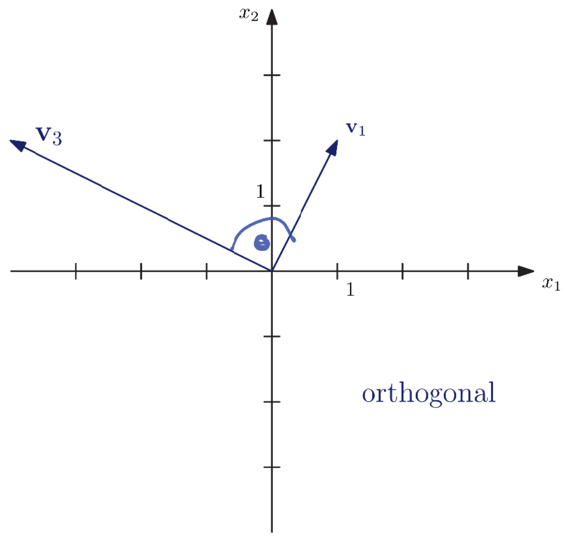
Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sind genau dann senkrecht (orthogonal) zueinander, wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ gilt.

Beispiel: Wir betrachten die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -2$ und $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$. Also sind $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_3$ orthogonal. Die Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind aber nicht orthogonal.





Orthogonalität

Orthogonalität

Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sind genau dann senkrecht (orthogonal) zueinander, wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ gilt.

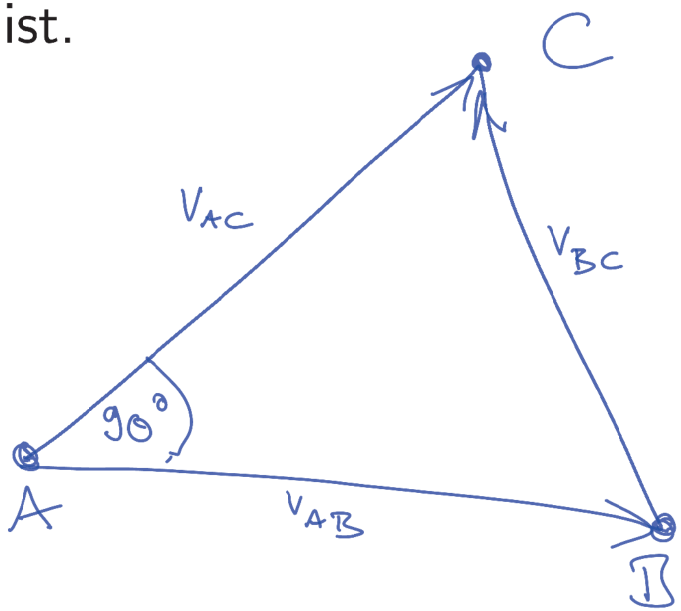
Übung: Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $A := (-1, 0, 1)$, $B := (1, 2, 3)$ und $C := (-2, 2, 0)$.

(i) Geben Sie die Vektoren an, die von A nach B, von A nach C bzw. von B nach C führen.

(ii) Überprüfen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist.

(i) $v_{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$



(ii) $\langle v_{AB}, v_{AC} \rangle = -2 + 4 - 2 = 0$

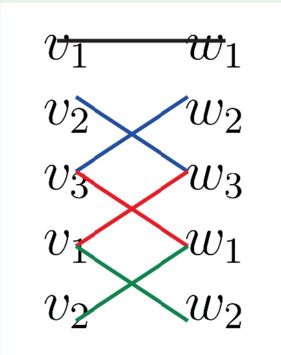
$\Rightarrow$ bei A gibt es einen rechten Winkel

Kreuzprodukt

Kreuzprodukt (Definition)

Es seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann definieren wir das Kreuzprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ wie folgt: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$.

Mnemonic



- $\rightsquigarrow$ schreibe die Vektoren nebeneinander und schreibe jeweils die ersten beiden Komponenten noch einmal darunter
- $\rightsquigarrow$ streiche die erste Zeile
- $\rightsquigarrow$ berechne die Einträge von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ über die eingezeichneten Kreuze:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

Kreuzprodukt (Definition)

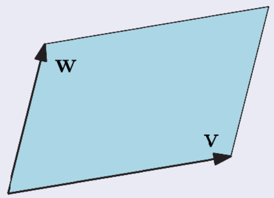
Es seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann definieren wir das Kreuzprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ wie folgt: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$.

Wichtige Eigenschaften

(a) Das Kreuzprodukt ist nur auf $\mathbb{R}^3$ definiert!!!

(b) Der Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}$ und orthogonal zu $\mathbf{w}$.

(c) Das Parallelogramm, dessen Seiten durch $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ beschrieben werden, hat den Flächeninhalt $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$.



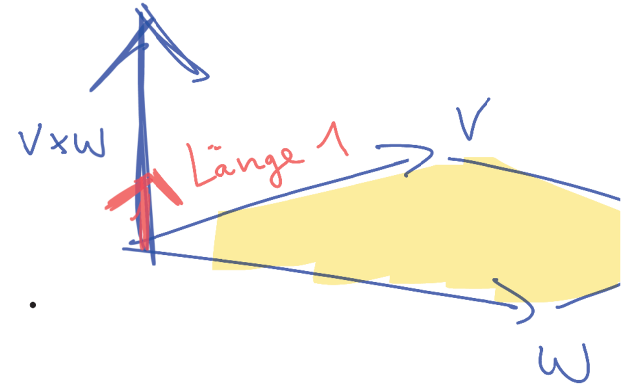
Übungsaufgabe

(a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot(-3) - 1\cdot 3 \\ 1\cdot 0 - 3\cdot(-3) \\ 3\cdot 3 - (-2)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{3} & \cancel{0} \\ -2 & 3 \\ 1 & -3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{array}$$

Übungsaufgabe



(b) Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie einen Vektor, der zu $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ orthogonal ist. ✓

(ii) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Paralellogramms, welches durch die Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ begrenzt wird. ✓

(iii) Bestimmen Sie einen Vektor, der zu $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ orthogonal ist und dessen Länge gleich 1 ist.

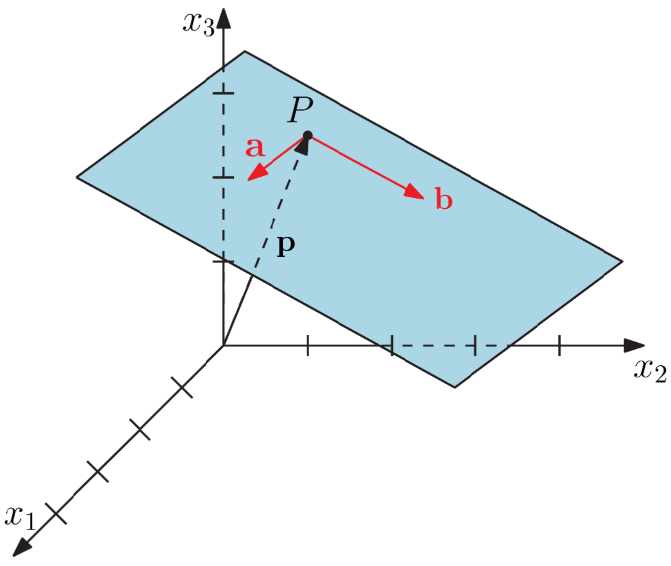
(i) $v \times w = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(ii) $\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebenen darstellen: Parameterform

Idee: Eine Ebene ist eindeutig festgelegt, wenn wir einen Punkt und zwei Vektoren, die nicht denselben Richtungssinn haben, innerhalb der Ebene kennen.



Jeder Punkt auf der Ebene E lässt sich von P aus erreichen, indem man eine Linearkombination von a und b läuft.

Also lässt sich jeder Punkt auf E durch einen Ortsvektor der Form $\mathbf{p}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ beschreiben

Parameterdarstellung einer Ebene

Jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der folgenden Form schreiben:

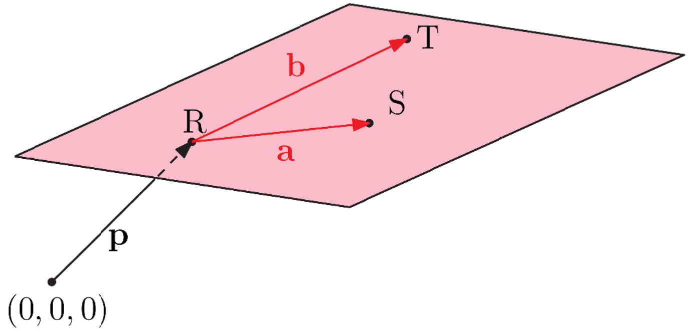
$$E = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \ = \mathbf{p} + \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

wobei die Punkte auf E durch ihre Ortsvektoren identifiziert werden. Diese Darstellung heißt Parameterform.

Beispiel

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es genau eine Ebene E, auf der die Punkte $R := (1,1,1)$, $S := (1,3,2)$ und $T := (-1,4,3)$ liegen. Man bestimme eine Parameterform von E.

ein Stützvektor: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



mögliche Spannvektoren: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eine Parameterform von E ist:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \;:\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) .$$

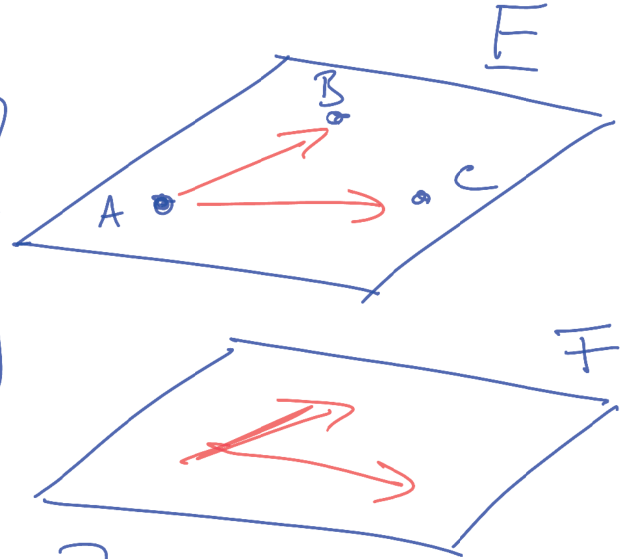
Übung

(a) Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene E, welche durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A := (6,3,0), \quad B := (-3,10,2) \ \text{ und } \ C := (5,3,3)\,.$$

(b) Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene F, welche durch den Punkt $D := (9,1,9)$ verläuft und parallel zu E ist.

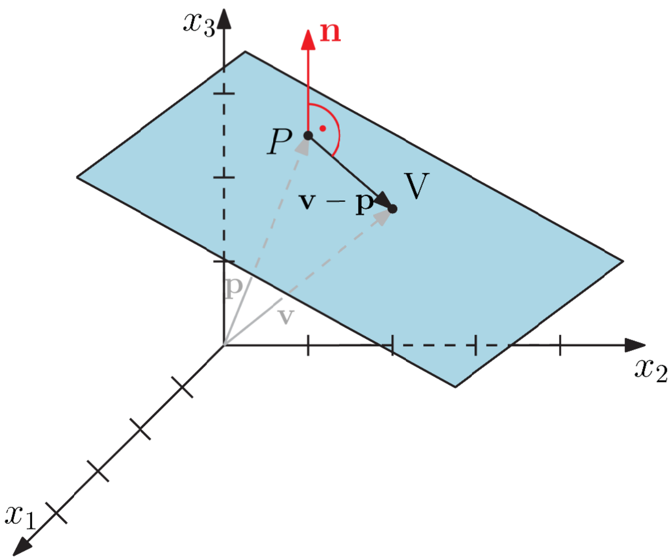
$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$



$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Ebenen darstellen: Normalform

Idee: Eine Ebene E ist im $\mathbb{R}^3$ eindeutig festgelegt, wenn wir einen Punkt der Ebene E und einen zu E senkrechten Vektor (ungleich $\mathbf{o}$) kennen.



Es sei $\mathbf{n}$ ein Vektor, der senkrecht auf E steht.

Für jeden Punkt V auf E ist der Vektor $\mathbf{v}$-$\mathbf{p}$ zwischen P und V orthogonal zu $\mathbf{n}$.

Also gilt $\langle \mathbf{v}\text{-}\mathbf{p}, \mathbf{n}\rangle = 0$ für jeden Ortsvektor $\mathbf{v}$ eines Punktes auf E.

Normalform einer Ebene im $\mathbb{R}^3$

Jede Ebene E im $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$E = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \ \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n}\rangle = 0\right\} = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \ \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{n}\rangle\right\}.$$

Dabei repräsentiert $\mathbf{p}$ einen beliebigen Punkt auf E. Der Vektor $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$ ist ein Normalenvektor von E, d.h. er ist orthogonal zu E. Diese Darstellung heißt Normalform.

Ebenen darstellen: Koordinatenform

Koordinatenform einer Ebene

Jede Ebene E im $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$E = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d \right\}$$

darstellen, wobei $a_1, a_2, a_3, d \in \mathbb{R}$. Die Darstellung heißt Koordinatenform.

Die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d$ beschreibt, welche Bedingung ein Punkt (x_1, x_2, x_3) erfüllen muss, damit dieser zur Ebene gehört.

Koordinatenform bestimmen

Ist eine Ebene E in Normalform $E = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \; \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0 \right\}$ gegeben, so lässt sich eine Koordinatengleichung wie folgt finden:

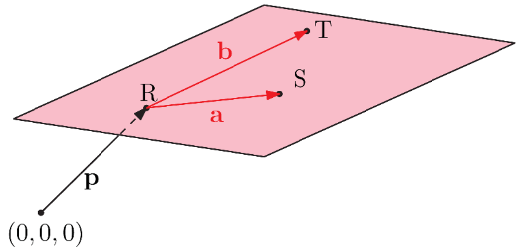
Setze $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und forme die Gleichung $\langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$ in eine Gleichung der Form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d$ um.

Beispiel

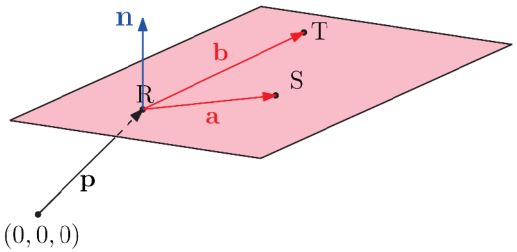
Beispiel: Im $\mathbb{R}^3$ gibt es genau eine Ebene E, auf der die Punkte $R := (1,1,1)$, $S := (1,3,2)$ und $T := (-1,4,3)$ liegen.

Wir kennen schon eine Parameterform von E:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$



Für eine Normalform von E benötigen wir wieder einen Stützvektor $\mathbf{p}$ und einen Normalenvektor $\mathbf{n}$. (Hinweis: Kreuzprodukt nutzen!)



Stützvektor: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Eine Normalform von E ist somit:

$$E = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} .$$

Beispiel

Beispiel: Im $\mathbb{R}^3$ gibt es genau eine Ebene E, auf der die Punkte $R := (1,1,1)$, $S := (1,3,2)$ und $T := (-1,4,3)$ liegen.

Eine Normalform von E ist:

$$E = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} .$$

Um eine Koordinatenform zu bestimmen, setzen wir

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

in die Gleichung der Normalform ein:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \ .$$

Also haben wir

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \right\} .$$

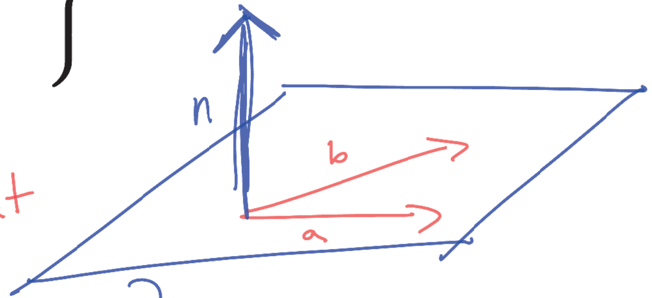
Übung

Geben Sie die folgenden Ebenen in Koordinatenform an:

$$\cancel{\text{(i)}\quad E_1 := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \mathbf{v} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}}$$

$$\text{(ii)}\quad E_2 := \left\{ \underset{p}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda \underset{a}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + \mu \underset{b}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

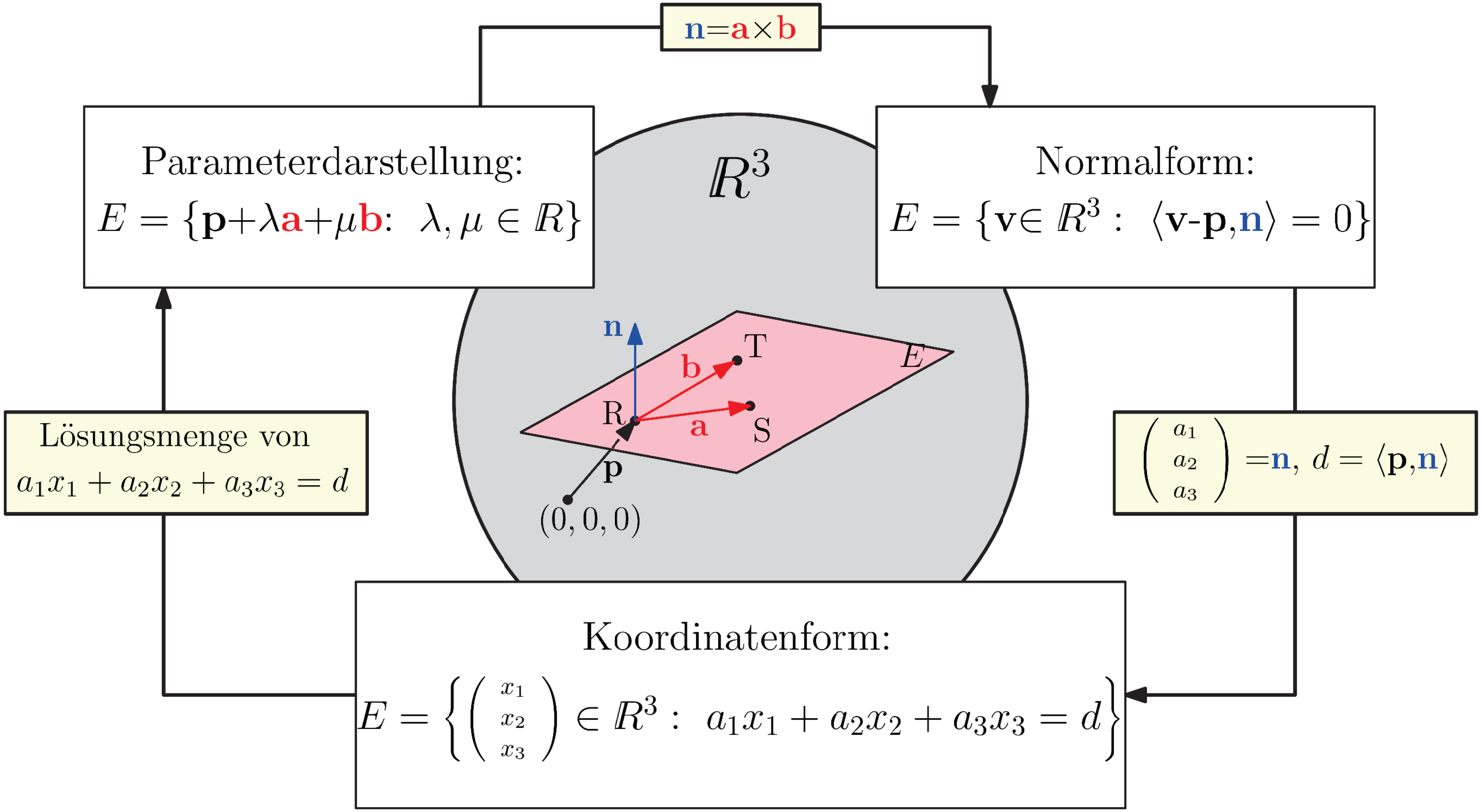
Kreuzprodukt



$$E_2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \left\langle v - \underset{p}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{n}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\rangle = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \boxed{1}\, x_1 + \boxed{-1}\, x_2 + \boxed{-1}\, x_3 = \overset{\langle p, n \rangle}{\boxed{-2}} \right\}$$

Überblick: Darstellungen



Hesse-Normalform und Abstand

Hesse-Normalform (Definition)

Eine Normalform $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0\}$ einer Ebene wird Hesse-Normalform genannt, falls die Länge von $\mathbf{n}$ gleich 1 ist. ($\|n\| = 1$)

Bemerkung: Eine Normalform lässt sich stets in eine HNF überführen, indem man den vorliegenden Normalenvektor durch dessen Länge teilt.

Beispiel: Gegeben sei die Ebene

$$E := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Die vorliegende Darstellung ist in Normalform, aber nicht in Hesse-Normalform, da der Normalenvektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Länge $\|\mathbf{n}\| = 3$ hat. Ein Normalenvektor mit Länge 1 ist somit $\frac{1}{3}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. Eine Hesse-Normalform ist schließlich

$$E = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Hesse-Normalform und Abstand

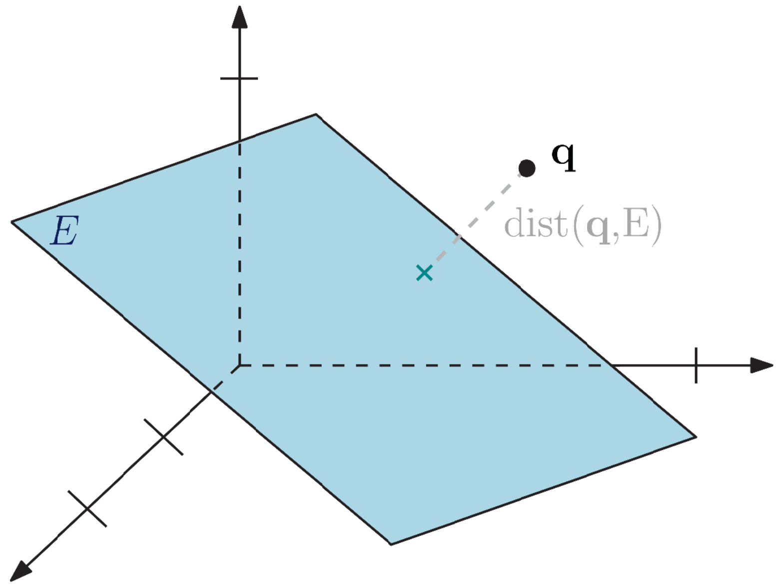
Hesse-Normalform (Definition)

Eine Normalform $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0\}$ einer Ebene wird Hesse-Normalform genannt, falls die Länge von $\mathbf{n}$ gleich 1 ist. ($\|n\| = 1$)

Abstand Punkt/Ebene

Sind ein Punkt (Ortsvektor) $\mathbf{q}$ und eine Ebene in Hesse-Normalform $E = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0\}$ gegeben, ist der Abstand zwischen $\mathbf{q}$ und E gleich

$$|\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle| \,.$$

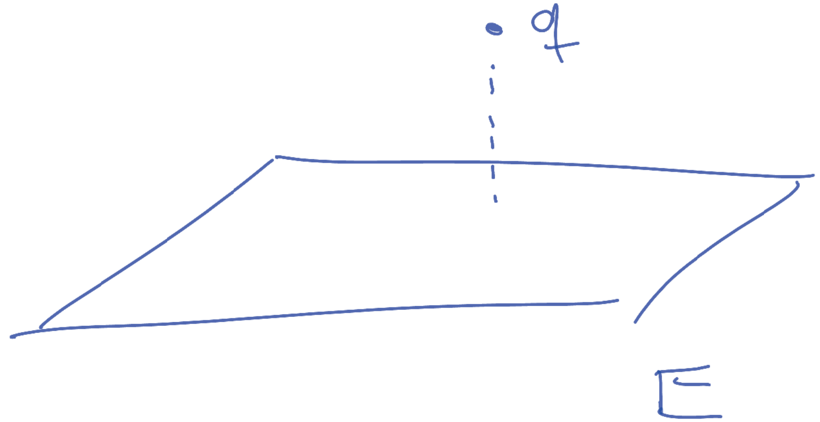


Hesse-Normalform und Abstand

Übung: Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt (Ortsvektor) $\mathbf{q} := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

$$= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \left\langle v - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

Hesse - Normalform



$$\left| \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right|$$

$$= \left| \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = 4 \Rightarrow \operatorname{dist}(q, E) = 4$$