$$x + 2 - \sqrt{4-x} = 0$$

$$x + 2 = \sqrt{4-x} \qquad | \, (\ldots)^2$$

$$(x+2)^2 = 4 - x$$

$$x^2 + 4x + 4 = 4 - x$$

$$x^2 + 5x = 0$$

$$x(x+5) = 0$$

$$x = 0 \lor x = -5$$

Probe: $0 + 2 - \sqrt{4-0} = 2 - \sqrt{4} = 0$ ✓

$-5 + 2 - \sqrt{4-(-5)} = -3 - \sqrt{9} = -6$ ↯

Lösung der ursprünglichen Gleichung ist nur $x = 0$

$$\sqrt{2x+10} - \sqrt{4x-8} = 2 \qquad | + \sqrt{4x-8}$$

$$\sqrt{2x+10} = 2 + \sqrt{4x-8} \qquad | \, (\ldots)^2$$

$$2x + 10 = (\underbrace{2}_{a} + \underbrace{\sqrt{4x-8}}_{b})^2 \qquad \sqrt{4(x-2)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{}$$

$$2x + 10 = \underbrace{4}_{a^2} + \underbrace{4\sqrt{4x-8}}_{2ab} + \underbrace{4x-8}_{b^2}$$

$$-2x + 14 = 4\sqrt{4x-8} \qquad | : 4$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{14}{4} = \sqrt{4x-8} \qquad | \, (\ldots)^2$$

$$\left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}\right)^2 = 4x - 8$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2 \cdot -\frac{1}{2}x \cdot \frac{7}{2} + \frac{49}{4} = 4x - 8$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{81}{4} = 0 \qquad | \cdot 4$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$x = -\frac{-30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30}{2}\right)^2 - 81}$$

$$= 15 \pm \sqrt{225 - 81}$$

$$= 15 \pm \sqrt{144}$$

$$= 15 \pm 12$$

$x = 27 \lor x = 3$ jetzt noch Probe

$$\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} = 4 \qquad | (\ldots)^2$$

$$x + 2 + \sqrt{2x+7} = 16$$

$$\sqrt{2x+7} = -x + 14 \qquad | (\ldots)^2$$

$$2x + 7 = (-x + 14)^2$$

$$2x + 7 = x^2 - 28x + 196$$

$$x^2 - 30x + 189 = 0$$

⋮

$|x^2-6x+1| = 8$

1. Fall: $x^2-6x+1 \geq 0$:

$x^2-6x+1=8$

$x^2-6x-7=0$

$x = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{9+7}$

$= 3 \pm 4$

$x=7 \vee x=-1$

Probe: $7^2-6\cdot 7+1 \geq 0$ ✓

$(-1)^2-6\cdot(-1)+1 \geq 0$ ✓

2. Fall: $x^2-6x+1<0$:

$-(x^2-6x+1)=8 \quad |\cdot(-1)$

$x^2-6x+1=-8$

$x^2-6x+9=0$

$x = 3 \pm \sqrt{9-9}$

$x=3$

Probe: $3^2-6\cdot 3+1<0$ ✓

Die Betragsgleichung hat die Lsg. $x=7$, $x=-1$ sowie $x=3$

$|x-5| - |x+2| = 7$

Insgesamt vier Fälle,

1. Fall: $x-5 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0$:

$$x-5-(x+2) = 7$$

$$-7 = 7$$

keine Lsg.

2. Fall: $x-5 \geq 0 \wedge x+2 < 0$

Ungleichungen nicht gleichzeitig erfüllbar. somit keine Lsg.

3. Fall: $x-5 < 0 \wedge x+2 \geq 0$

$$-(x-5)-(x+2) = 7$$

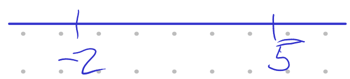
$$-x+5-x-2 = 7$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

Probe: $-2-5<0$ ✓ $-2+2 \geq 0$ ✓

4. Fall: $x-5 < 0 \wedge x+2 < 0$



$$-(x-5)-(-(x+2)) = 7$$

$$-x+5+x+2 = 7$$

$$7 = 7$$

Gleichung immer erfüllt, somit sind alle x mit $x-5<0 \wedge x+2<0$ eine Lsg., d.h. alle x mit $x<-2$

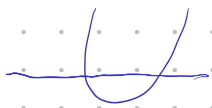
Die Betragsgleichung wird durch alle x mit $x < -2$ oder $x = -2$

d.h. alle x mit $x \leq -2$.

Bruchgleichungen

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{x-2} - \frac{5}{x+5} + 2 = 0 \quad | \cdot (x-2), \cdot (x+5)$$



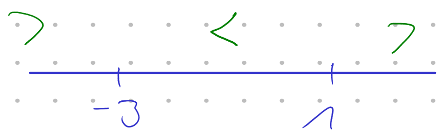
$$x^2 + 2x - 1 < 2$$

zugeh. Gleichung: $x^2 + 2x - 1 = 2$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$x = -3 \lor x = 1$$



Lösungen sind alle x mit $x > -3$ und $x < 1$

$$\mathbb{L} = (-3, 1) = \{ x \in \mathbb{R},\ x > -3 \land x < 1 \}$$

$x^2+4x < x(6-x)$

$x^2+4x < 6x-x^2$

$2x^2-2x<0$

$2x(x-1) < 0 \qquad |:2$

$x(x-1) < 0$

1. Mglk: Produkt mit zwei Faktoren ist negativ, wenn Faktoren untersch. Vorzeichen haben:

1. Fall: $x>0 \land x-1<0$

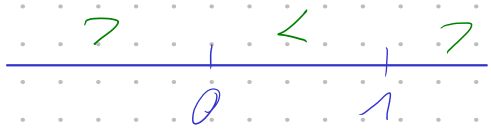
$x>0 \land x<1$

2. Fall: $x<0 \land x-1>0$

$x<0 \land x>1$ nicht erfüllbar

Lösung sind alle x mit $x>0$ und $x<1$

2. Mglk: Nullstellen der zugeh. Gleichung ausrechnen und Vorzeichen in den sich ergebenden Bereichen berechnen



$2x^2-2x=0$

$2x(x-1)=0$

$x=0 \lor x=1$

Somit Lsg.: alle x mit $x>0$ und $x<1$.

$9\sqrt{5x+2} < 25 + 4\sqrt{5x+2} \quad | -4\sqrt{\dots} \; | :5$

$\sqrt{5x+2} < 5$

zugeh. Gleichung:

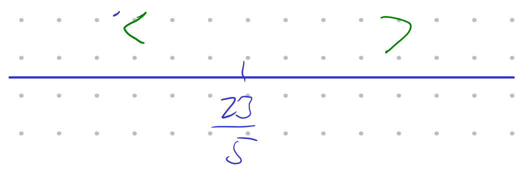
$9\sqrt{5x+2} = 25 + 4\sqrt{5x+2} \quad | -4\sqrt{\dots}$

$5\sqrt{5x+2} = 25$

$\sqrt{5x+2} = 5 \quad | (\dots)^2$

$5x+2 = 25$

$x = \frac{23}{5}$



Vorzeichen der Bereiche bestimmen durch einsetzen bel. Zahlen im jeweiligen Bereich (hier 0 und 5):

$\sqrt{5\cdot 0+2} < 5$ ✓

$\sqrt{5\cdot 5+2} < 5$ ✗

Lösung sind alle x mit $x < \frac{23}{5}$ („linker Bereich"), die im Def.-Bereich liegen.

$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} \geq \sqrt{x+8}$

Lösen der zugeh. Gleichung:

$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+8} \quad | (\dots)^2$

$(\sqrt{x} + \sqrt{x+3})^2 = x+8$

$$x + 2\sqrt{x}\,\sqrt{x+3} + x + 3 = x + 8$$

$$2\sqrt{x\cdot(x+3)} = -x + 5 \qquad |\ (\ldots)^2$$

$$4\cdot x(x+3) = (-x+5)^2$$

$$4x^2 + 12x = x^2 - 10x + 25$$

$$3x^2 + 22x - 25 = 0$$

$$x^2 + \frac{22}{3}x - \frac{25}{3} = 0$$

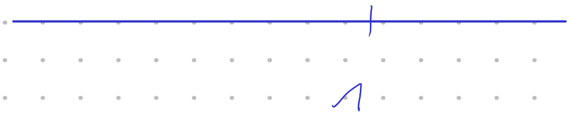
$$x = -\frac{22}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + \frac{25}{3}}$$

$$x = -\frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{9} + \frac{75}{9}}$$

$$x = -\frac{11}{3} \pm \frac{14}{3}$$

$$x = 1 \ \vee\ \cancel{x = -\frac{25}{3}}$$

fällt weg (Probe)



Nun Bereiche prüfen und mit Def.-Bereich abgleichen.

$$\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$$

zugeh. Gleichung:

$$\frac{|x-1|}{2x+2} = 1 \qquad | \cdot 2x+2$$

$$|x-1| = 2x+2$$

1. Fall: $x-1 \geq 0$:

$$x-1 = 2x+2$$

$x = -3$ keine Lsg. da $-3-1 \not\geq 0$

2. Fall: $x-1 < 0$

$$-(x-1) = 2x+2$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$