Beweise „Wenn a und b durch 7 teilbar sind, dann ist auch a+b durch 7 teilbar"

Def.: Eine natürliche Zahl n ist durch eine natürliche Zahl p teilbar, falls eine natürliche Zahl m existiert, sodass $n = m \cdot p$

Beweis:

Gegeben: a ist durch 7 teilbar

$\Leftrightarrow \exists p_1 \in \mathbb{N} : a = 7 \cdot p_1$

b ist durch 7 teilbar

$\Leftrightarrow \exists p_2 \in \mathbb{N} : b = 7 \cdot p_2$

Daraus folgt: Verwenden der Voraussetzung

$$a + b = 7 \cdot p_1 + 7 \cdot p_2 = 7 \cdot (p_1 + p_2)$$

Da p_1 und p_2 natürliche Zahlen sind, ist auch $p_1 + p_2$ eine natürliche Zahl. Somit haben wir eine natürliche Zahl q (nämlich $p_1 + p_2$) gefunden mit $a+b = 7q$, d.h. a+b ist durch 7 teilbar.

(zu zeigen: a+b ist durch 7 teilbar

$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N} : a+b = 7q$)

kürzer aufgeschrieben:

Beweis: $a+b = \underbrace{7p_1}_{\substack{a \text{ durch} \\ 7 \text{ teilbar}}} + \underbrace{7p_2}_{\substack{b \text{ durch} \\ 7 \text{ teilbar}}} = 7(p_1+p_2)$

$\Rightarrow$ $a+b$ durch 7 teilbar.

Übung: Wenn a gerade ist und b durch 3 teilbar, dann ist $a \cdot b$ durch 6 teilbar.

Beweisen oder widerlegen Sie:
Sei a eine natürliche Zahl. Wenn a^3 gerade ist, dann ist a^4 gerade.

$a = 2m$

$a^3 = 2^3 m^3 = 2(2^2 m^3)$

$a^3 = 2p$

$a \cdot a \cdot a = 2p$

$a^4 = 2q$

Primfaktorzerlegung:

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

$a^3 = p_1^3 \, p_2^3 \ldots p_n^3$

$a^3 = 2 \ldots$

Beweis: Da a^3 gerade ist, muß auch a gerade sein.
Dies ergibt sich aus der Primfaktorzerlegung:
Sei $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ die Primfaktorzerlegung von a. Dann ist $a^3 = (p_1 \cdot p_2 \cdots p_n)^3$

$= p_1^3 \, p_2^3 \cdots p_n^3$

Laut Voraussetzung ist a^3 gerade, d.h.
von der Form $a^3 = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$

Somit gilt auch $p_1^3 \cdot p_2^3 \cdot \ldots p_n^3 = 2 \cdot m$,
d.h. eines der p_i auf der linken Seite
muß 2 sein. Damit muß a gerade sein,

denn $a = \underbrace{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots p_n}_{\text{mindestens ein Faktor ist 2}}$

Damit ist auch a^4 gerade, denn

$$a^4 = \underbrace{p_1^4 \cdot p_2^4 \cdot p_3^4 \cdot \ldots p_n^4}_{\text{mindestens ein } p_i \text{ ist 2}}$$

Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + n$ ist gerade.

Beweis: Sei $A(n)$ die Aussage „n^2+n ist gerade"

IA: $A(1)$ ist wahr, denn $1^2 + 1 = 2$ ist gerade.

IS: Wir zeigen „$A(n) \Rightarrow A(n+1)$"

Voraussetzung: n^2+n gerade, d.h. $\exists m \in \mathbb{N}: n^2+n = 2m$

$A(n+1) \Leftrightarrow (n+1)^2 + n + 1$ ist gerade

$$(n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1$$

$$= \underbrace{\underbrace{n^2 + n}_{\text{gerade laut IV}} + 2n + 2}_{\text{gerade als Summe von drei geraden Zahlen.}}$$

kürzer, ohne Induktion: $n^2 + n = n \cdot (n+1)$