Vorkurs Mathematik

Vorlesung 5 - Vektoren und Lineare Gleichungssysteme

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

TUHH

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Inhalt

1. Vektoren
   - Vektoren in der Geometrie
   - Grundrechenarten
   - Linearkombinationen
2. Lineare Gleichungssysteme
   - Einsetzungsverfahren
   - Gleichsetzungsverfahren
   - Eliminationsverfahren (Additionsverfahren)
   - graphisches Lösen
3. Analytische Geometrie I
   - Geraden beschreiben
   - Lagebeziehungen

Was ist ein Vektor?

Die Physik unterscheidet zwischen skalaren und vektoriellen Größen.

Skalare Größen sind durch einen **Zahlwert** (mit Einheit) charakterisiert.

Vektorielle Größen sind durch einen **Zahlwert** (mit Einheit) und eine **Richtung** charakterisiert.

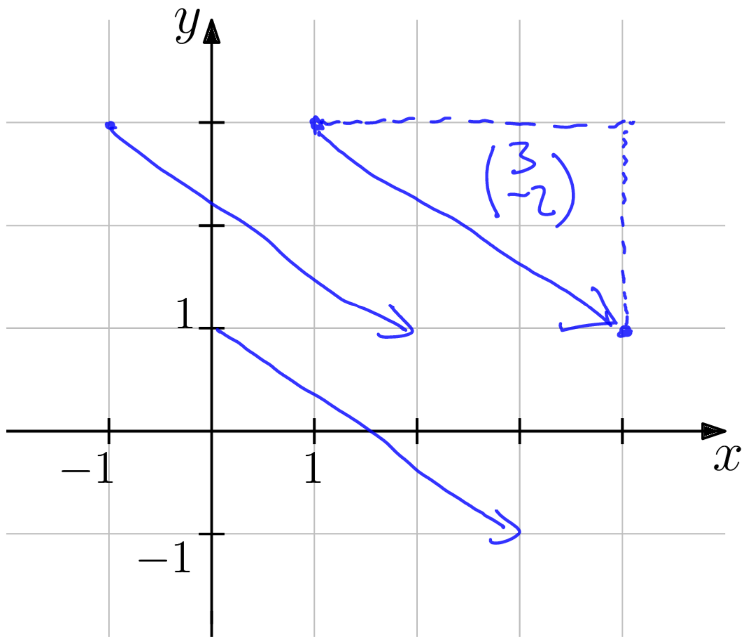
Vektorielle Größen werden oft durch Pfeile (Vektoren) dargestellt, deren Länge den Zahlwert repräsentiert.

In der **Analytischen Geometrie** nutzen wir Vektoren unter anderem zur Beschreibung von

- geometrischen Objekten (Geraden, Ebenen, Dreiecke etc.)
- geometrischen Operationen (Drehungen, Spiegelungen etc.)

Vektoren in der Ebene

Ebene: zwei Koordinatenachsen (bspw. x- und y-Achse) schneiden sich im Nullpunkt (Ursprung)

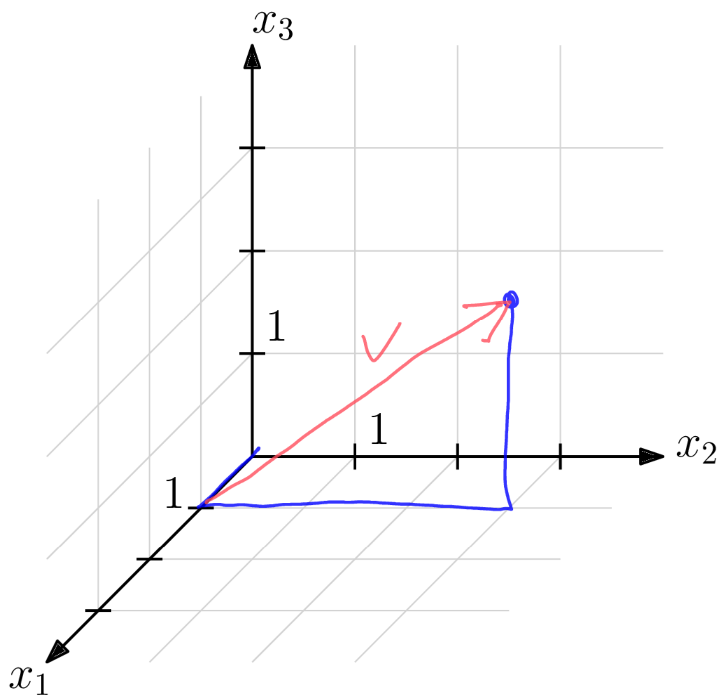


Ein Vektor in dieser Ebene ist ein Pfeil, von dem wir nur die Ausdehnung in x- und y-Richtung kennen.

Beispiel: $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor, der bei einem beliebigen Fußpunkt startet und dann 3 Schritte in x-Richtung sowie -2 Schritte in y-Richtung läuft.

Vektoren im 3-dimensionalen Raum

3-dim Raum: drei Koordinatenachsen (bspw. x_1-, x_2- und x_3-Achse) schneiden sich im Nullpunkt (Ursprung)



Ein Vektor in diesem System ist ein Pfeil, von dem wir nur die Ausdehnung in x_1-, x_2- und x_3-Richtung kennen.

Beispiel: $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft 1 Schritt in x_1-Richtung, 3 Schritte in x_2-Richtung und 2 Schritte in x_3-Richtung.

Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Jedes Objekt $\mathbf{v}$ der Form

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$$

wird reeller Vektor genannt.

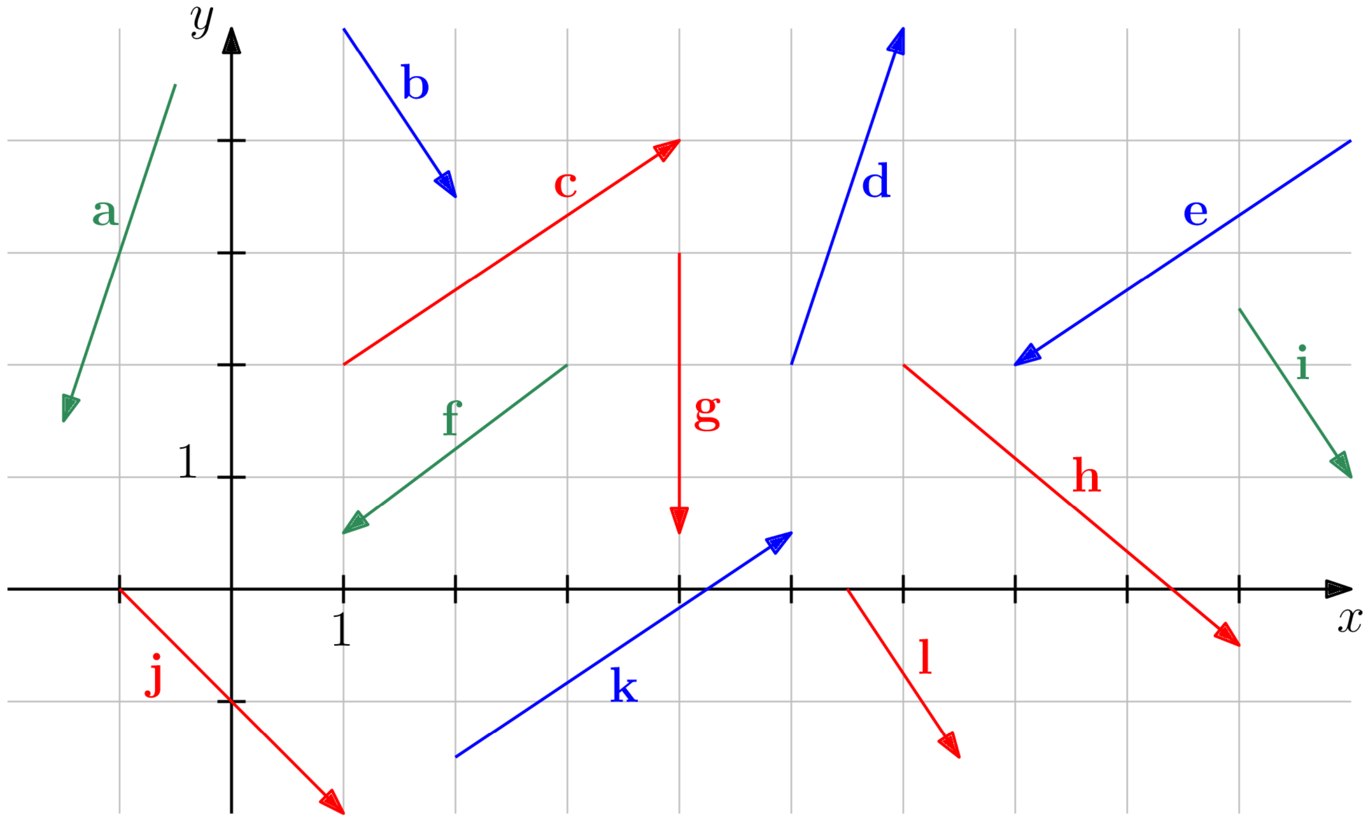
Die Menge aller solcher Vektoren bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^n$.

Die Einträge $v_1, v_2, \ldots, v_n$ werden Komponenten genannt.

Hinweis:

- *Wir betrachten heute nur den Fall $n \in \{2, 3\}$. In der Linearen Algebra werden wir aber häufig Vektoren mit größerem $n \in \mathbb{N}$ benötigen.*
- *In unterschiedlichen Vorlesungen werden sie unterschiedliche Notationen sehen: $\mathbf{v}$, $\vec{v}$, $\underline{v}$ etc.*

Übung



Übung: Welche der dargestellten Vektoren sind identisch? Geben Sie deren Komponentendarstellung an.

Lösung:

$c = k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

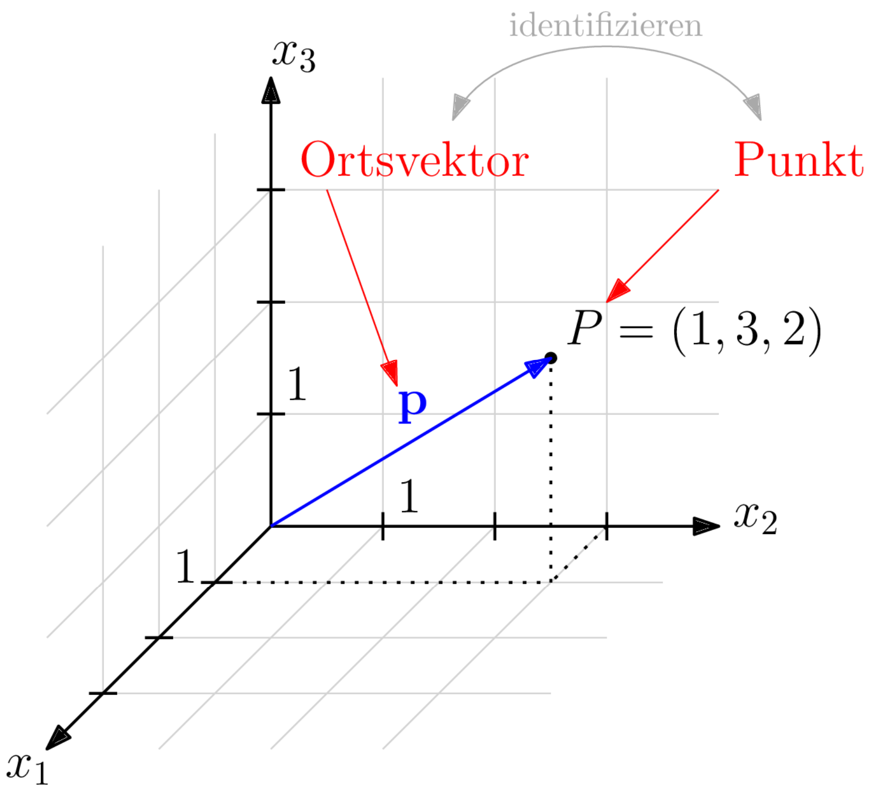
$b = i = l = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

Punkt und Ortsvektor

Ein Punkt P wird normalerweise durch ein *Tupel* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ beschrieben. Solch einen Punkt können wir auch mit dem zugehörigen Vektor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

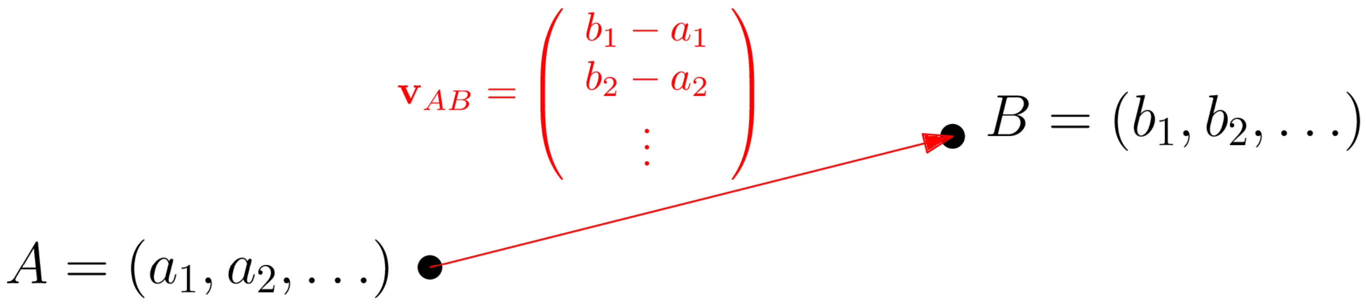
identifizieren. In diesem Fall nennen wir $\mathbf{p}$ den Ortsvektor von P.



Vektor zwischen zwei Punkten

Vektor zwischen zwei Punkten

Sind zwei Punkte A und B gegeben, so ergibt sich der Vektor $\mathbf{v}_{AB}$, der von A nach B führt, indem man den Ortsvektor von A vom Ortsvektor von B subtrahiert.



Beispiel: Der Vektor, der von $A := (2, 4, -6)$ zu $B := (3, -1, 9)$ führt, ist

$$\mathbf{v}_{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -1 - 4 \\ 9 - (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors

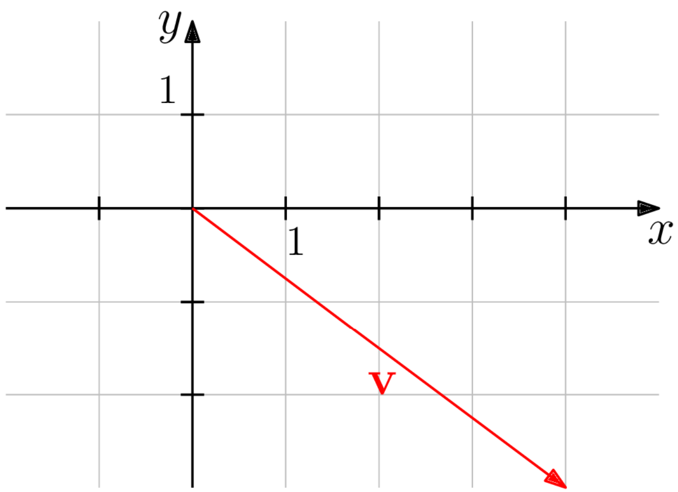
Länge eines Vektors

Gegeben sei ein beliebiger Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Länge des Vektors gleich

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}\,.$$

Beispiel: Die Länge des Vektors $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist ... $\sqrt{4^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{25} = 5$

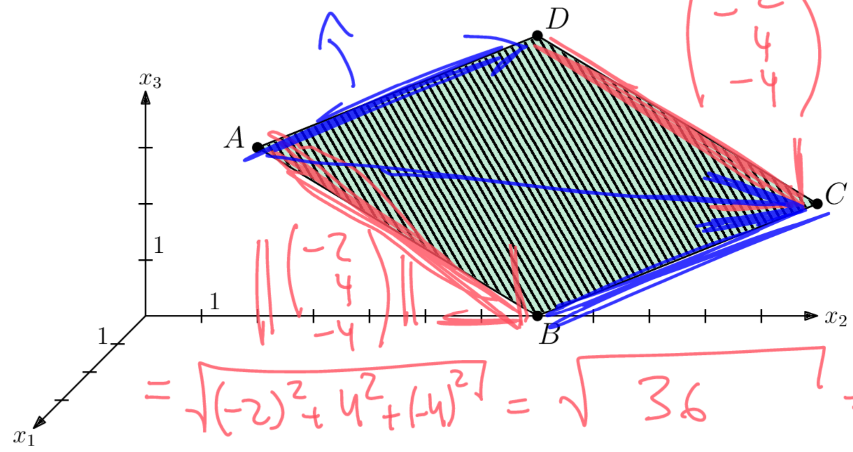


Übungsaufgabe

Ein Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, C, D liegt schief im Raum. Dabei seien die folgenden Eckpunkte bekannt:

$A := (2, 3, 4)$, $B := (0, 7, 0)$
und $D := (-2, 6, 4)$.

$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 5$



$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$

(i) Bestimmen Sie die Vektoren $\mathbf{v}_{AB}$ und $\mathbf{v}_{AD}$, die von A zu B bzw. D führen.

(ii) Wie lautet der Punkt C?

(iii) Bestimmen Sie den Umfang des Parallelogramms.

(iv) Bestimmen Sie die Länge der Diagonale AC.

Lösung:

(i) $v_{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $v_{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $C = (-4, 10, 0)$

(iii) Umfang $= 5 + 5 + 6 + 6 = 22$

(iv) $\|v_{AC}\| = \sqrt{(-6)^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{101}$ $\qquad v_{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

Addition/Subtraktion von Vektoren

Addition/Subtraktion von Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Die Addition/Subtraktion zweier Vektoren im $\mathbb{R}^n$ erfolgt komponentenweise.
Genauer: Gegeben seien zwei Vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Dann definieren wir

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} - \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ \vdots \\ v_n - w_n \end{pmatrix} .$$

Addition/Subtraktion von Vektoren

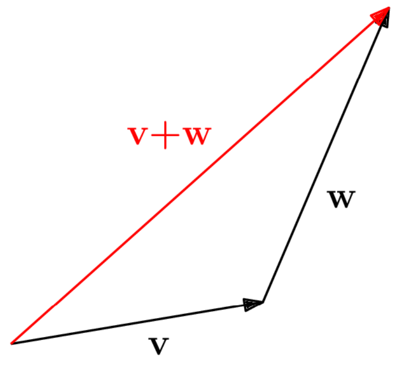
Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ -13 \\ 111 \end{pmatrix}$$

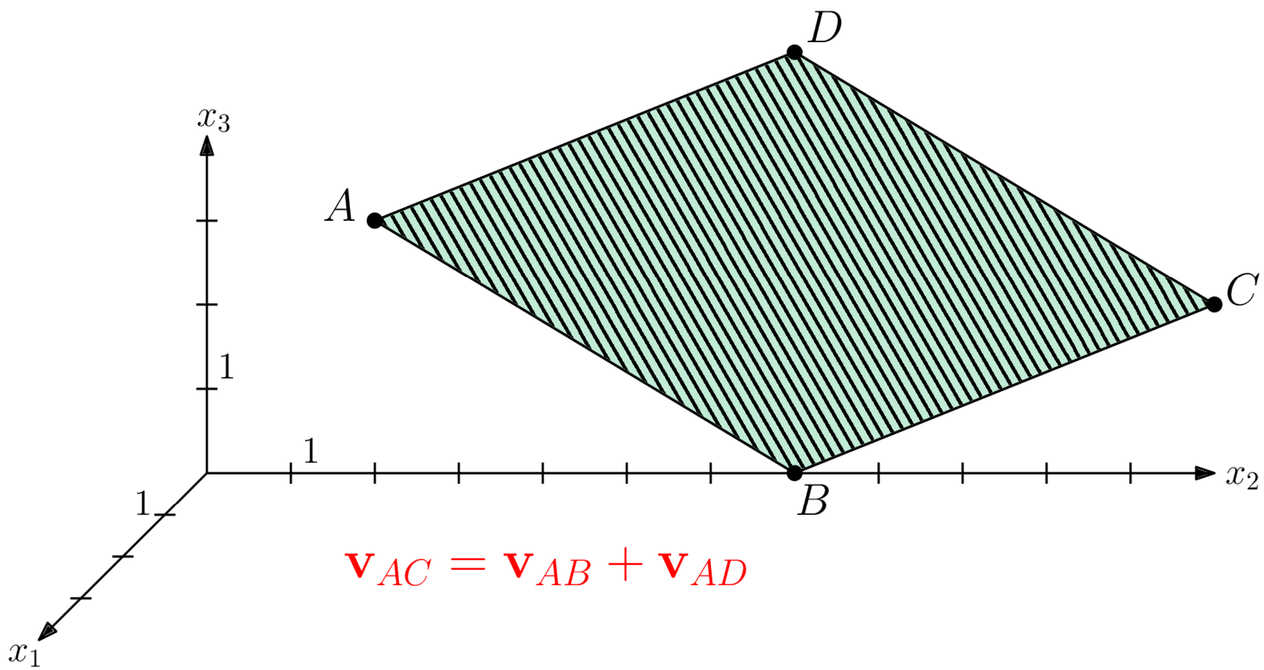
$$= \begin{pmatrix} 5 + (-10) \\ 2 + (-5) \\ -7 + (-13) \\ 100 + 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -20 \\ 211 \end{pmatrix}$$

Addition/Subtraktion von Vektoren

Addition von Vektoren: Die Addition von Vektoren entspricht einer Hintereinanderausführung der Bewegungen, die durch die einzelnen Vektoren beschrieben werden.



Beispiel:



Skalare Multiplikation für Vektoren

Skalare Multiplikation für Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Die skalare Multiplikation für Vektoren im $\mathbb{R}^n$ erfolgt komponentenweise.

Genauer: Gegeben seien eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein Vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

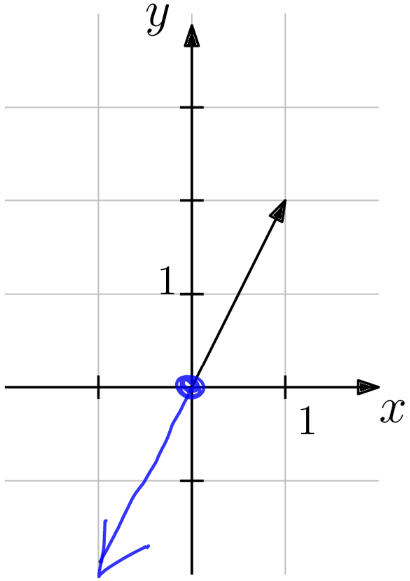
Dann definieren wir

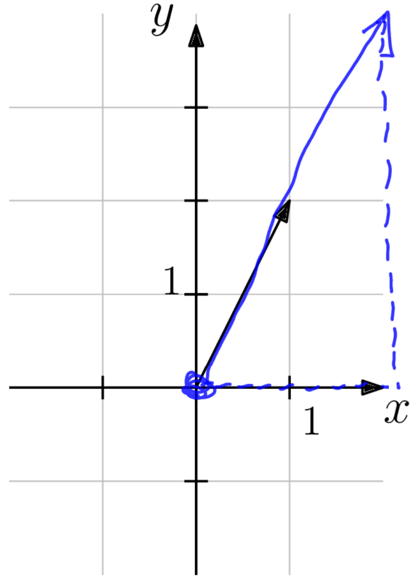
$$\lambda \cdot \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix} .$$

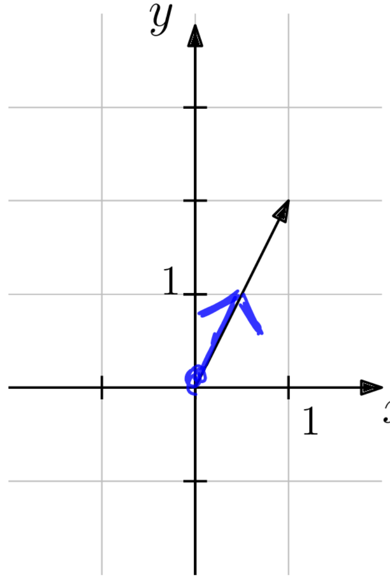
Skalare Multiplikation für Vektoren

Beispiele: Gegeben sei der Vektor $\mathbf{v} = \binom{1}{2}$. Man bestimme und zeichne die folgenden drei Vektoren:

(i) $-1 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (ii) $2 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (iii) $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$







Richtungs-änderung Streckung Stauchung

Beispiele

$$\underbrace{3\cdot\begin{pmatrix}13\\-12\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}39\\-36\end{pmatrix}} - \underbrace{2\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}29\\-28\end{pmatrix}$$

$$2\cdot\left(\underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\5\\-5\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}3\\7\\-6\end{pmatrix}}\right)-\begin{pmatrix}6\\-2\\2\end{pmatrix}=$$

$$= \underbrace{2\cdot\begin{pmatrix}3\\7\\-6\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}6\\14\\-12\end{pmatrix}} - \begin{pmatrix}6\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6\\14\\-12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\16\\-14\end{pmatrix}$$

Rechenregeln

Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$

Gegeben seien Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Kommutativität: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

(ii) Assoziativität: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(iii) Distributivität I: $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$

(iv) Distributivität II: $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$

Übung

(a) Berechnen Sie!

(i) $4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

Lösung:

(i)

$$= \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +15 \\ -40 \\ +10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 \\ -40 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Übung

(b) Bestimmen Sie jeweils einen Vektor $\mathbf{x}$, sodass die gegebene Gleichung erfüllt ist!

(i) $2\mathbf{x} - 3\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 4\mathbf{x} + \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}$

(ii) $2\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - \mathbf{x}\right) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

Lösung:

(i)

$$2x - \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} = 4x + \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} \quad / -4x$$

$$-2x - \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} \quad / + \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$-2\cdot x = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix} \quad / \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix} - 2x = x + \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \quad / -x$$

$$\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix} - 3x = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \quad / -\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$-3\cdot x = \begin{pmatrix}-6\\1\\-1\end{pmatrix} \quad / \cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$x = \begin{pmatrix}2\\-1{,}3\\1{,}3\end{pmatrix}$$

Übung

(c) Bestimmen Sie Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Gleichung stimmt!

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 1\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ 3\alpha_2 + (-2)\alpha_3 \\ -2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{III}: \quad -2\alpha_3 = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = \tfrac{1}{2}}$$

$$\text{II}: \quad 3\alpha_2 + (-2)\cdot\tfrac{1}{2} = -7 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = -2}$$

$$\text{I}: \quad 2\alpha_1 + 1\cdot(-2) + 4\cdot\tfrac{1}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 3/2}$$

Linearkombination

Linearkombination

Gegeben seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Dann wird der Vektor

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ genannt.

Man sagt auch, dass sich $\mathbf{v}$ aus den Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ erzeugen lässt.

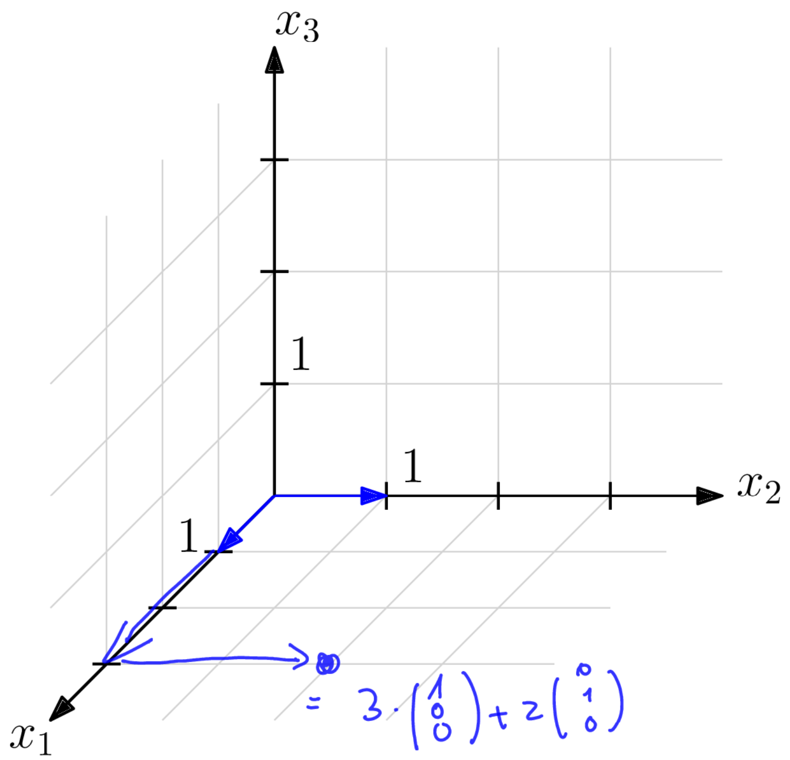
- $a + b$ ist Linearkombination von a und b
- $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Linearkombination von $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Linearkombination

Beispiel: Jeder Punkt (Ortsvektor) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, der in der x_1x_2-Ebene liegt, lässt sich aus den Vektoren

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erzeugen.

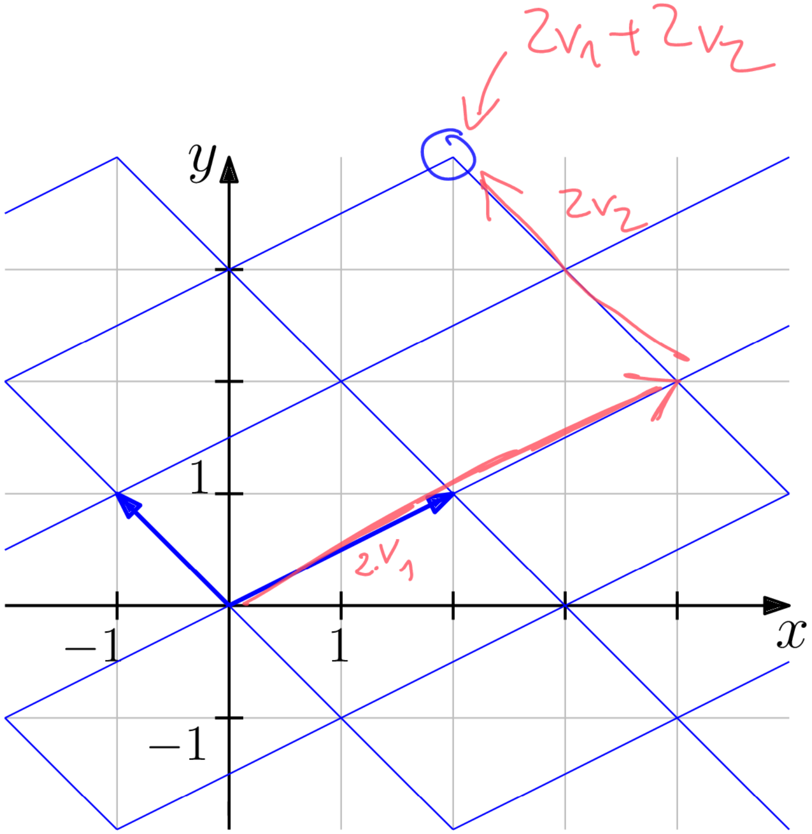


Beispiel

Jeder Punkt (Ortsvektor) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich aus den Vektoren

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen.



Spannraum

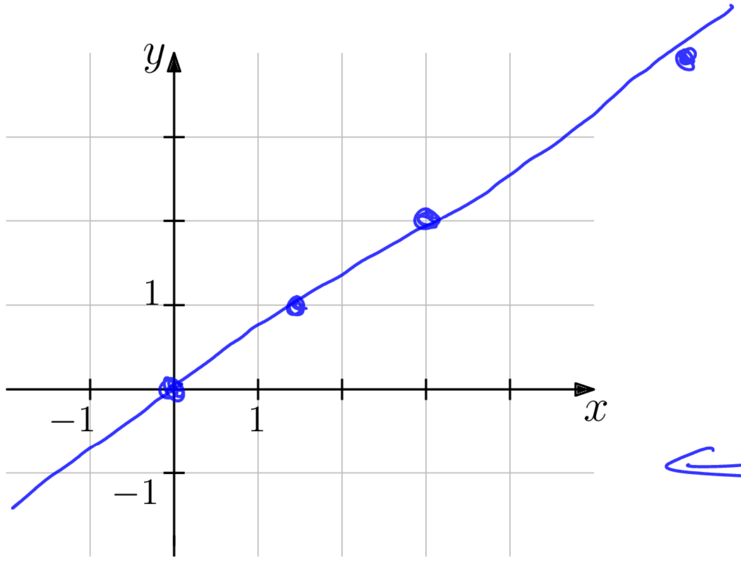
Spannraum

Gegeben seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

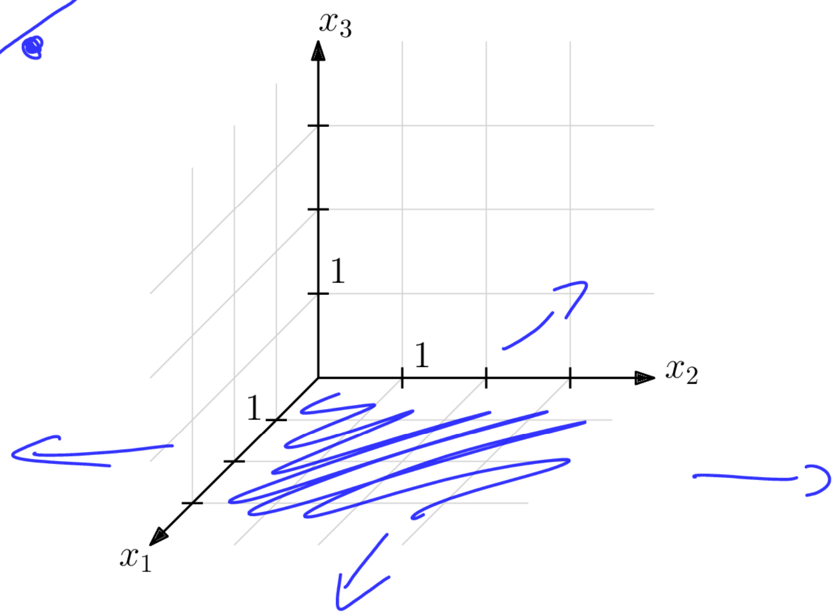
Die Menge aller Linearkombinationen aus den Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ wird als Spannraum (oder auch Lineare Hülle) von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ bezeichnet. Kurz:

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) := \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \ .$$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$



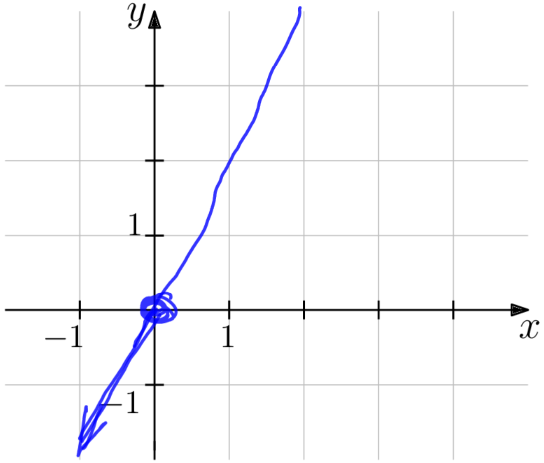
$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$



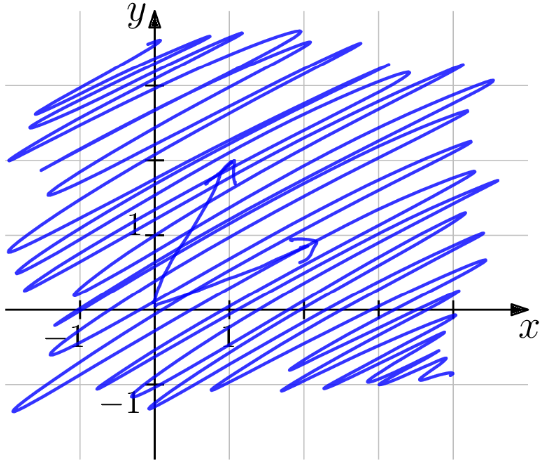
Übung

Skizzieren Sie die folgenden Spannräume!

$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

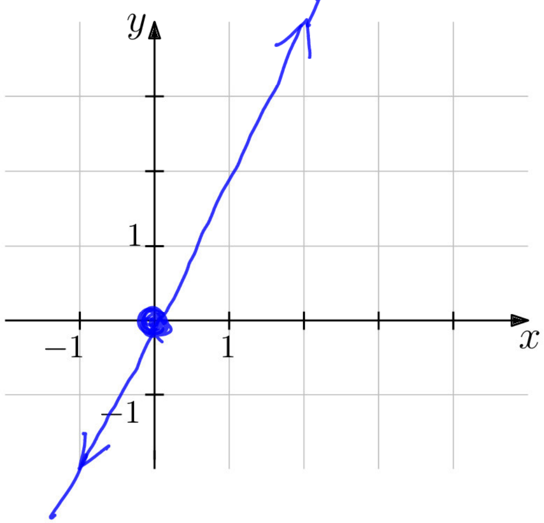


$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

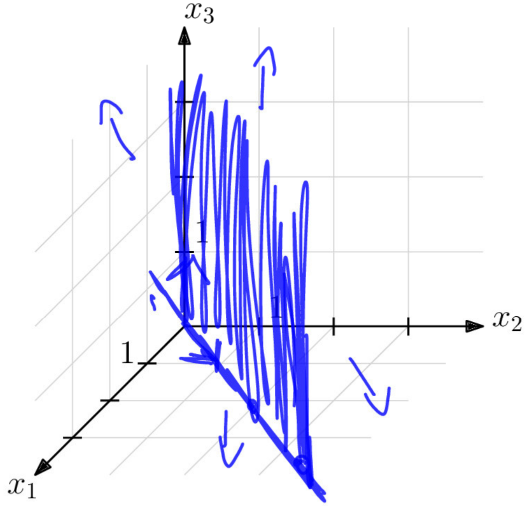


alles enthalten

$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$



$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$



Linearkombination → Lineares Gleichungssystem

Eine häufig in der Linearen Algebra auftretende Frage ist:
„Lässt sich ein gegebener Vektor $\mathbf{v}$ als Linearkombination anderer Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ schreiben?"

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{x_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{x_2} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \boxed{x_3} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Frage, ob ein gewisses *lineares Gleichungssystem* lösbar ist:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 8 & = & 1x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 \\ 17 & = & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 9x_3 \\ 0 & = & -1x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem

Lineares Gleichungssystem

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist von der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \ . \end{aligned}$$

Dabei sind a_{ij} und b_i (meist reelle) Zahlen. Eine Belegung von $x_1, \ldots, x_n$ mit Werten, sodass alle Gleichungen zugleich erfüllt sind, wird Lösung des Gleichungssystems genannt. Solch eine Belegung geben wir als Vektor an.

Lineares Gleichungssystem

Beispiel: Das System

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I}: & 1x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 8 \\ \mathrm{II}: & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 17 \\ \mathrm{III}: & -1x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

ist ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen.

Eine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$\mathrm{I}: \quad 1 \cdot 7 - 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 8$

$\mathrm{II}: \quad 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 17$

$\mathrm{III}: \quad -1 \cdot 7 + 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 0$

Gleichsetzungsverfahren

Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren werden 2 Gleichungen nach derselben Variable umgestellt und die resultierenden Terme gleichgesetzt. Es entsteht somit eine Gleichung, die eine der vorhandenen Variablen nicht enthält.

Beispiel: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren:

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 15 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & = & -9 \end{array}$$

Rechnung

$\text{I}: \quad 2x_1 - 4x_2 = 15 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 15 + 4x_2 \quad /:2$

$\boxed{x_1} = \underline{7{,}5 + 2x_2}$

$\text{II}: \quad -4x_1 + 2x_2 = -9 \quad \Rightarrow \quad -4x_1 = -9 - 2x_2 \quad /:(-4)$

$\boxed{x_1} = \underline{2.25 + \frac{1}{2}x_2}$

gleichsetzen

$\Longrightarrow \quad 7{,}5 + 2x_2 = 2{,}25 + 0{,}5x_2 \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{7}{2}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 7{,}5 + 2x_2 = 7{,}5 + 2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Einsetzungsverfahren

Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren wird eine Gleichung nach einer Variable umgestellt und diese dann in den anderen Gleichungen ersetzt. Es entstehen somit Gleichungen, die eine der vorhandenen Variablen nicht enthalten.

Beispiel: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 15 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & = & -9 \end{array}$$

$\mathrm{I}: \quad 2x_1 - 4x_2 = 15 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 7{,}5 + 2x_2$ einsetzen

$\mathrm{II}: \quad -4 \cdot (7{,}5 + 2x_2) + 2x_2 = -9$

$\Rightarrow \quad -30 - 8x_2 + 2x_2 = -9 \qquad /+30$

$\Rightarrow \quad -6x_2 = 21 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{21}{6} = \underline{-\frac{7}{2}}$

x_1 wie vorher berechnen: $\underline{x_1 = \frac{1}{2}}$

Übung

(a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{rrcrcl} & 3x_1 & + & 5x_2 & = & 7 \\ \text{II}: & 2x_1 & + & 4x_2 & = & 4\,. \end{array}$$

Lösung:

$\text{II}: \quad 2x_1 = 4 - 4x_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2 - 2x_2}$

$\downarrow$ in I einsetzen

$$3\cdot(2-2x_2) + 5x_2 = 7$$
$$6 - 6x_2 + 5x_2 = 7$$
$$6 - 1x_2 = 7 \qquad /-6$$
$$-x_2 = 1 \qquad /:(-1)$$
$$\underline{x_2 = -1}$$
$$x_1 = 2 - 2\cdot(-1) = \underline{4}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Übung

(b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{rrcrcr} \mathrm{I}: & 4x_1 & + & 8x_2 & = & 14 \\ \mathrm{II}: & 2x_1 & - & x_2 & = & -3\,. \end{array}$$

Lösung:

$$\mathrm{I}: \quad 4x_1 = 14 - 8x_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{x_1} = \frac{7}{2} - 2x_2}$$

$$\mathrm{II}: \quad 2x_1 = -3 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_2$$

gleichsetzen

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{2} - 2x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_2 \qquad / -\frac{1}{2}x_2 \qquad / -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{5}{2}x_2 = -\frac{10}{2} \qquad / \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x_2 = 2}$$

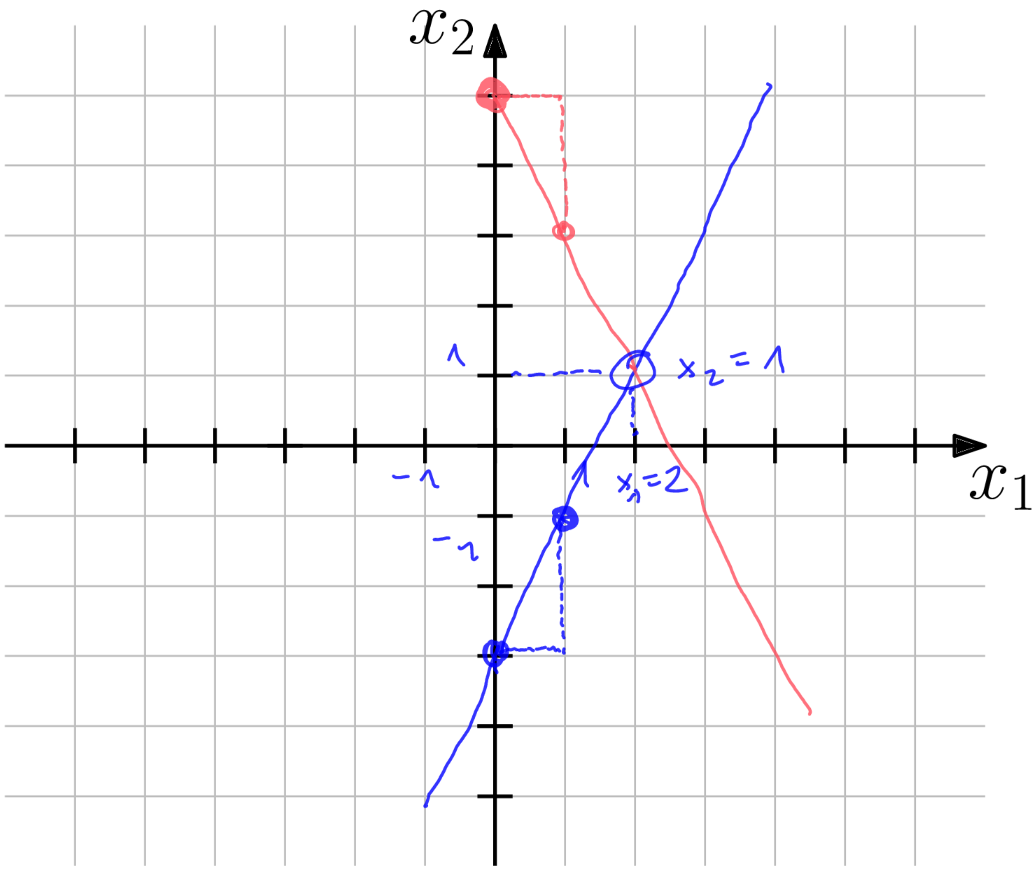
$$x_1 = \frac{7}{2} - 2x_2 = \frac{7}{2} - 4 = \underline{-\frac{1}{2}}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Graphisches Lösen

Beispiel: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem graphisch:

$$\begin{array}{lrcrcl} \mathrm{I}: & 4x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \\ \mathrm{II}: & 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array}$$



Notizen:

I : $-2x_2 = 6 - 4x_1$

$\Rightarrow \quad x_2 = -3 + 2x_1$

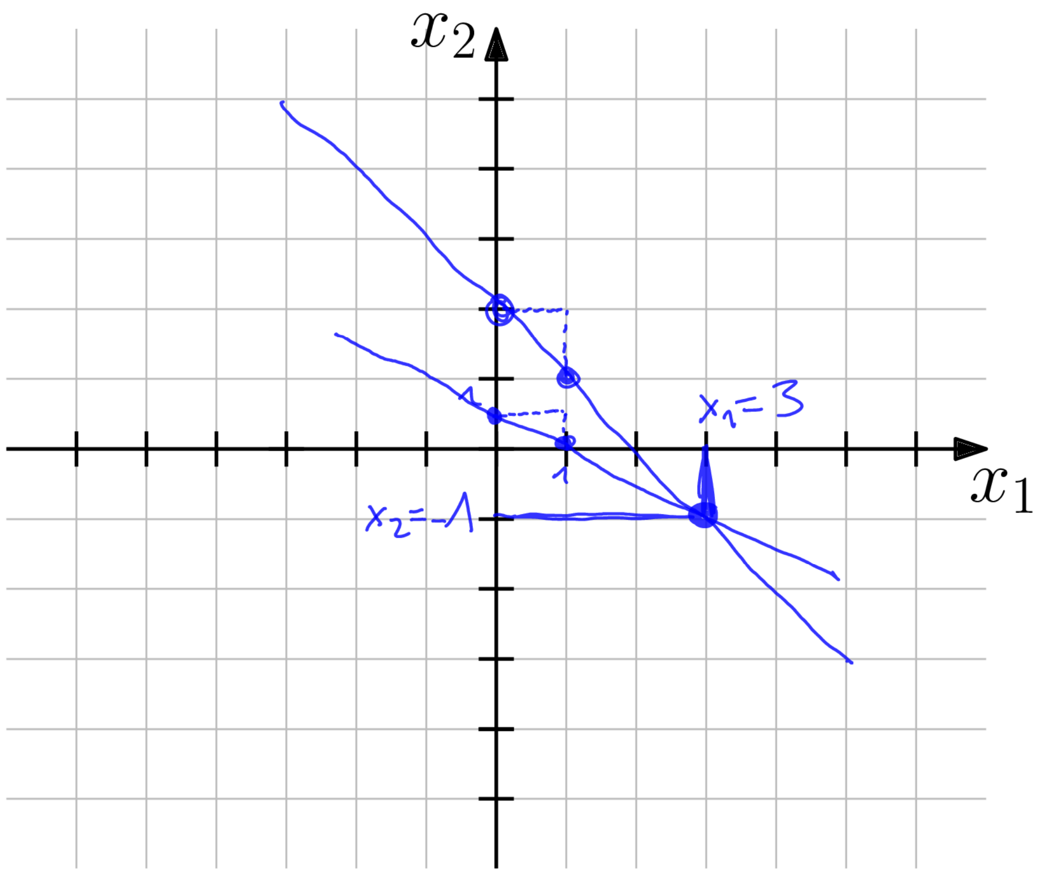
II : $x_2 = 5 - 2x_1$

Lösung $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übung

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem graphisch:

$$\begin{array}{lrcrcr} \mathrm{I}: & 3x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ \mathrm{II}: & 2x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \end{array}$$



Notizen:

$\mathrm{I}: \quad 3x_2 = 6 - 3x_1 \quad |:3$

$\quad x_2 = \underline{2} - \underline{1}x_1$

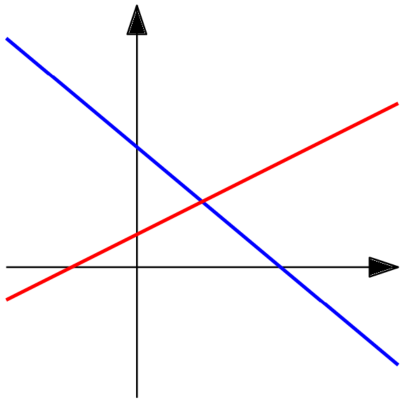
$\mathrm{II}: \quad 4x_2 = 2 - 2x_1 \quad |:4$

$\quad x_2 = \underline{\frac{1}{2}} - \underline{\frac{1}{2}}x_1$

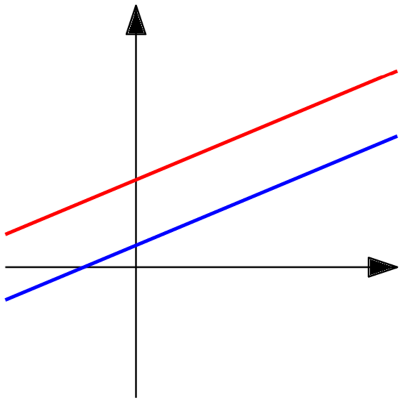
Lösung: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösbarkeit: Anzahl Lösungen

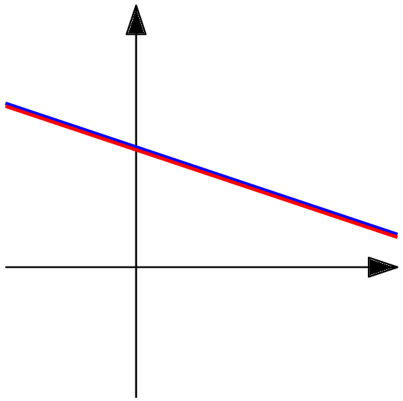
Es gibt 3 mögliche Schnittmengen für Geraden:



Schnittpunkt
(eine Lösung)



parallel
(keine Lösung)



identisch
(unendl. viele Lösungen)

Allgemein gilt sogar Folgendes:

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Jedes lineare Gleichungssystem hat entweder (i) genau eine Lösung oder (ii) keine Lösung oder (iii) unendlich viele Lösungen.

Eliminationsverfahren

Eliminationsverfahren

Beim Eliminationsverfahren (Additionsverfahren) werden zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) addiert/subtrahiert, sodass mindestens eine Variable eliminiert wird.

Beispiel 1: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren:

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 15 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & = & -9 \end{array} \right| / + 2\mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 15 \\ & & -6x_2 & = & 21 \end{array} \right|$$

$\mathrm{II}: \quad -6x_2 = 21 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{7}{2}$

$\mathrm{I}: \quad 2x_1 - 4 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = 15 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$

Lösung: $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$

Eliminationsverfahren

Eliminationsverfahren

Beim Eliminationsverfahren (Additionsverfahren) werden zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) addiert/subtrahiert, sodass mindestens eine Variable eliminiert wird.

Beispiel 2: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren:

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 5x_2 & = & 2 \\ -8x_1 & + & 10x_2 & = & -4 \end{array} \right| \; /+2\mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 4x_1 - 5x_2 = 2 \\ \cancel{0x_1 + 0x_2 = 0} \end{array} \right|$$

unendlich viele Lösung

(Fortsetzung morgen)