Gleichungen lösen

1. a) $x = 3$
   b) Vereinfacht lautet die Gleichung $7x + 8 = 0$ mit Lösung $x = -8/7$
   c) $x_1 = 0; x_2 = -\dfrac{3}{4}$
   d) $x = 2$
   e) $x_1 = 0; x_2 = -\dfrac{2}{3}; x_3 = 1$
   f) keine Lösung

2. a) $x = 1$
   b) Quadrieren und lösen der quadratischen Gleichung liefert Kandidaten $x = 0$ und $x = 3$. Probe zeigt, daß nur $x = 3$ eine Lösung ist.
   c) Quadrieren und lösen der quadratischen Gleichung liefert Kandidaten $x = 0$ und $x = 5$. Probe zeigt, daß nur $x = 5$ eine Lösung ist.
   d) Quadrieren und lösen der quadratischen Gleichung liefert $x = 8$, was durch die Probe als Lösung bestätigt wird.
   e) Quadrieren, vereinfachen und erneutes Quadrieren ergibt $x = 4$. Die Probe zeigt, daß dies in der Tat eine Lösung ist.
   f) Nach einmaligem Quadrieren und Vereinfachen ergibt sich $x\sqrt{1 + 8x} = x^2 + 2x$. Man sieht, daß $x = 0$ eine Lösung ist (durch Probe wird dies bestätigt). Nun teilt man auf beiden Seiten durch x, quadriert anschließend wieder und löst die quadratische Gleichung, was die beiden Kandidaten $x = 1$ und $x = 3$ liefert. Auch hier zeigt die Probe, daß beide Kandidaten tatsächlich Lösungen sind. Insgesamt gibt es also die drei Lösungen 0, 1 und 3.

3. Die Beträge jeweils durch Fallunterscheidungen auflösen, dann die resultierenden Gleichungen lösen und prüfen, ob die Lösungen die im beobachteten Fall angenommene Ungleichung erfüllen. Dies führt zu folgenden Lösungen:
   a) $x = 1$ und $x = 7$
   b) $x = 2$, $x = -2$
   c) Da $|x| = 0$ äquivalent zu $x = 0$ kann man die Betragstriche weglassen und die resultierende quadratische Gleichung lösen. Dies führt zu den Lösungen $x = 1$ und $x = 2$.
   d) Zunächst beobachten wir, daß die Gleichung nur für x verschieden von -2 und -5 definiert ist (sonst würde Null im Nenner stehen). Nun machen wir eine Fallunterscheidung um die Betragstriche aufzulösen: Fall $x+4 \geq 0$ führt nach Multiplikation beider Nenner (jeweils auf beiden Seiten) zu linearer Gleichung mit Lösungskandidat $x = -\frac{11}{4}$. Da $-\frac{11}{4} + 4 \geq 0$ handelt es sich hierbei um

eine Lösung. Fall $x + 4 < 0$ führt mit demselben Vorgehen wie im vorherigen Fall auf eine quadratische Gleichung, welche keine Lösungen besitzt. Somit ist $-\frac{11}{4}$ die einzige Lösung.