Vorkurs Mathematik

Integralrechnung

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

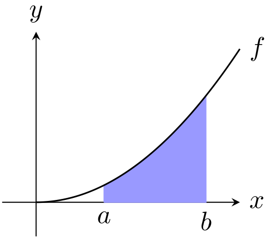
TUHH

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Motivation

Gegeben $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Integralrechnung: Fläche unter f in $[a, b]$



Integral

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

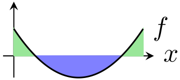
- a, b Integrationsgrenzen
- f Integrand
- x Integrationsvariable
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\text{€})\,\mathrm{d}\text{€}$

Linearität:

- Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

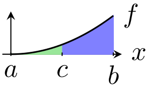
Positivität und Monotonie:

- $f \geqslant 0 \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- $f \leqslant g \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$ Fläche wo $f \geqslant 0$ $-$ Fläche wo $f < 0$



Teilung und Beträge:

- Für $a < c < b$: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, und $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$



Bestimmung von Stammfunktionen

„Differenzieren ist Handwerk, integrieren ist Kunst.“

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\int f(x)\,\mathrm{d}x + c$	$f(x)$

Linearität

$$\int \alpha f(x)+\beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x+\beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Produkte ➪ partielle Integration

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

(spezielle) Quotienten:
➪ Partialbruchzerlegung

(spezielle) Verkettungen: ➪ Substitution

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c$$