

# Vorkurs Mathematik

## Trigonometrie

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten



# Was ist ein Winkel?

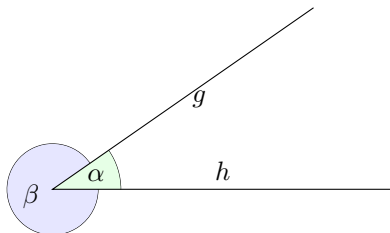


Abbildung: Winkel zwischen Halbgeraden

**Winkel** = Maß für eine Drehung

**Winkelmaße:**

- ▶ Gradmaß
- ▶ Bogenmaß

Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck beträgt stets  $180^\circ$  (Bogenmaß  $\pi$ ).

# Bezeichnungen von Winkeln



**Vollwinkel**

Halbgeraden stimmen überein

$360^\circ$



**gestreckter Winkel**

Halbgeraden bilden eine Gerade

$180^\circ$



**rechter Winkel**

halb so groß wie gestreckter Winkel

$90^\circ$



**spitzer Winkel**

kleiner als rechter Winkel



**stumpfer Winkel**

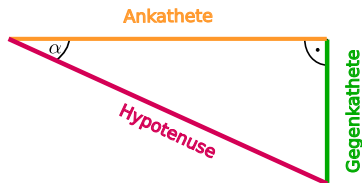
größer als rechter Winkel,  
aber kleiner als gestreckter Winkel



**überstumpfer Winkel**

größer als gestreckter Winkel

# Rechtwinkliges Dreieck



Das Verhältnis dieser Seiten zueinander definiert die **trigonometrischen Funktionen**.

$$\sin(\alpha) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

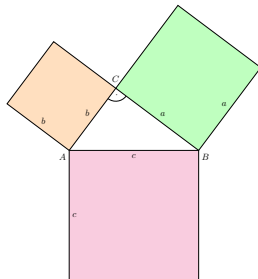
$$\cos(\alpha) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot(\alpha) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

## Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

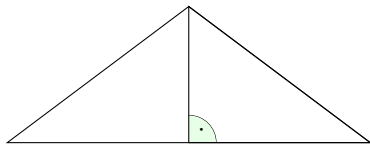
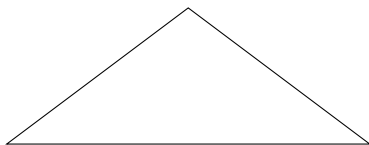


# Allgemeine Dreiecke

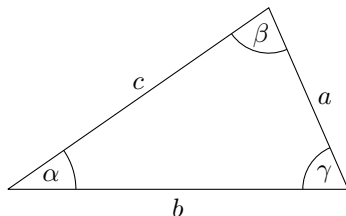
Auf Grundlage unserer Definition  
können wir z.B. den Sinus eines Winkels  
in einem **allgemeinen Dreieck** berechnen



**rechtwinklige Hilfsdreiecke** einzeichnen



# Allgemeine Dreiecke



Weitere hilfreiche Resultate, um Seitenlängen oder Winkel in allgemeinen Dreiecken zu berechnen:

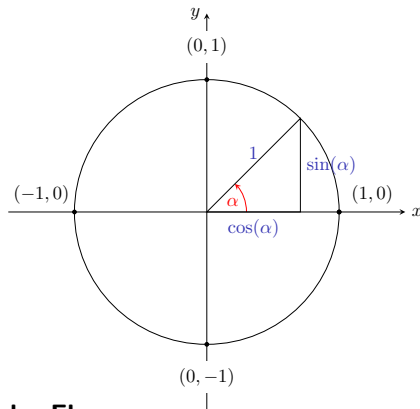
**Sinussatz:**

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

**Kosinussatz:**

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) = c^2$$

# Einheitskreis: Sinus- und Cosinuswerte



## Einheitskreis in der Ebene

= Kreis mit Radius 1 um den Punkt  $(0,0)$

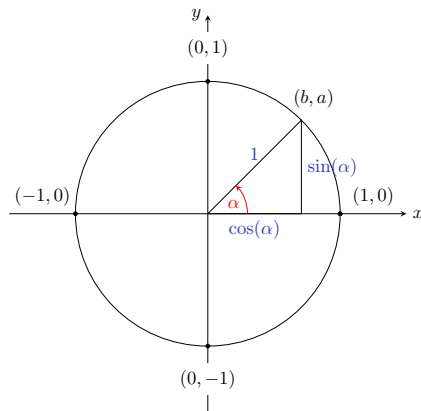
eingezeichnetes Dreieck hat einen **rechten Winkel**



## Sinus- und Cosinuswerte sind ablesbar:

- ▶ Sinuswerte von  $\alpha$  auf der y-Achse
- ▶ Cosinuswerte von  $\alpha$  auf der x-Achse

# Winkelmaß: Bogenmaß



**Ausgangspunkt:** Einheitskreis in der Ebene

Länge des kompletten Kreisbogens  
= Umfang des Kreises mit Radius 1  
=  $2\pi$

Winkel  $\alpha$  = Länge des Kreisbogenstücks zwischen  $(1, 0)$  und  $(b, a)$



# Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß

$$\frac{\text{Gradmaß des Winkels}}{360^\circ} = \frac{\text{Bogenmaß des Winkels}}{2\pi}$$

Sei  $\alpha$  ein Winkel, der im Gradmaß die Form  $x^\circ$  hat.  
Der Winkel im Bogenmaß berechnet sich wie folgt:

$$\alpha = \frac{x}{180} \cdot \pi.$$

Winkel in Grad	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
Winkel im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

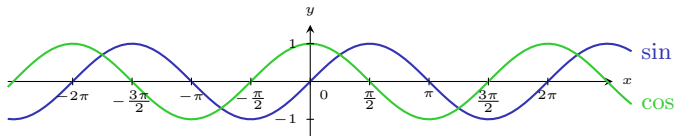
# Trigonometrische Funktionen

## Sinusfunktion

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

### Eigenschaften:

- ▶ punktsymmetrisch,  
d. h.  $\sin(-x) = -\sin(x)$
- ▶ Nullstellen:  $\{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ periodisch mit Periode  $2\pi$ ,  
d. h.  $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$



## Kosinusfunktion

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

### Eigenschaften:

- ▶ symmetrisch,  
d. h.  $\cos(x) = \cos(-x)$
- ▶ Nullstellen:  $\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ periodisch mit Periode  $2\pi$ ,  
d. h.  $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$

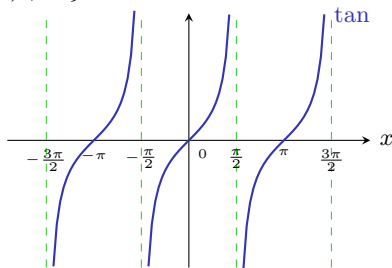
# Trigonometrische Funktionen

## Tangensfunktion

$$\tan: \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

### Eigenschaften:

- ▶ punktsymmetrisch
- ▶ periodisch mit Periode  $\pi$ ,  
d. h.  $\tan(x) = \tan(x + \pi)$
- ▶ Nullstellen:  $\{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$



## Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

- ▶  $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- ▶  $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- ▶  $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
- ▶  $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$
- ▶  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$