Beweise

1. a) Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine gerade Zahl. Das bedeutet, es gibt eine Zahl $p \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 2p$. Also ist

$$n \cdot m = 2p \cdot m = 2r,$$

wobei $r := p \cdot m$ wieder eine ganze Zahl ist. Somit ist $n \cdot m$ eine gerade Zahl.

b) Beweisrichtung „$\Leftarrow$“: Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine ungerade Zahl. Das bedeutet, es existiert eine Zahl $p \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 2p + 1$. Damit gilt

$$n + 1 = 2p + 1 + 1 = 2p + 2 = 2(p + 1).$$

Es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$, nämlich $q := p + 1$, sodass $n + 1 = 2q$. Daraus folgt, dass $n + 1$ gerade ist.
Beweisrichtung „$\Rightarrow$“: Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $n + 1$ eine gerade Zahl. Das bedeutet, es existiert eine Zahl $p \in \mathbb{Z}$, sodass $n + 1 = 2p$. Also ist

$$n = n + 1 - 1 = 2p - 1 = 2p - 2 + 1 = 2(p - 1) + 1 = 2q + 1,$$

wobei $q := p - 1$ mit $q \in \mathbb{Z}$ ist. Somit ist $n = 2q + 1$ eine ungerade Zahl.

c) Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine gerade Zahl. Das bedeutet, es gibt eine Zahl $p \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 2p$. Daraus folgt:

$$n^2 = (2p)^2 = 2p \cdot 2p = 2\left(2p^2\right).$$

Es gilt also $n^2 = 2m$ mit $m := 2p^2 \in \mathbb{Z}$, da $p \in \mathbb{Z}$. Folglich ist n^2 gerade. Alternativ kann man auch die Aussage (a) für $n^2 = n \cdot n$ nutzen.

2. a) **Induktionsanfang ($n = 1$):** Für $n = 1$ lautet der relevante Term

$$7^n - 4^n = 7 - 4 = 3\ ,$$

welcher durch 3 teilbar ist.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass wir die Aussage schon für n gezeigt haben, das heißt wir nehmen an, dass $7^n - 4^n$ durch 3 teilbar ist.

Induktionsschritt ($n \to n + 1$): Unser Ziel ist es nun unter der Induktionsvoraussetzung die Aussage für $n + 1$ zu beweisen. Das heißt, wir zeigen, dass $7^{n+1} - 4^{n+1}$ durch 3 teilbar ist. Geschicktes Umformen liefert

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 4^{n+1} &= 7 \cdot 7^n - 4 \cdot 4^n \\ &= 6 \cdot 7^n + 7^n - 3 \cdot 4^n - 4^n \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 7^n - 4^n) + (7^n - 4^n)\ . \end{aligned}$$

Da $3 \cdot (2 \cdot 7^n - 4^n)$ durch 3 teilbar ist und, nach Induktionsvoraussetzung auch $7^n - 4^n$ durch 3 teilbar ist, folgt, dass auch deren Summe, also $7^{n+1} - 4^{n+1}$, durch 3 teilbar ist.

b) **Induktionsanfang ($n = 5$):** Für $n = 5$ lautet die Ungleichung

$$32 > 25 \ ,$$

was richtig ist.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass wir die Ungleichung schon für n gezeigt haben, das heißt, es gilt $2^n > n^2$.

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Unser Ziel ist es nun unter der Induktionsvoraussetzung die Aussage für $n+1$ zu beweisen. Das heißt, wir zeigen $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Zunächst einmal gilt laut Induktionsvoraussetzung (IV), dass

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot n^2 \ .$$

Wenn wir es also schaffen zu zeigen, dass $2 \cdot n^2 \geq (n+1)^2$ gilt, dann folgt $2^{n+1} > (n+1)^2$ (die Aussage für $n+1$). Um die Ungleichung $2 \cdot n^2 \geq (n+1)^2$ zu zeigen, wenden wir Äquivalenzumformungen an:

$$\begin{aligned} 2 \cdot n^2 \geq (n+1)^2 &\Leftrightarrow \ 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \\ &\Leftrightarrow \ n^2 - 2n - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ (n-1)^2 - 2 \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist wahr, da $n \geq 5$ vorausgesetzt ist und somit $(n-1)^2 - 2 \geq 14$ gilt.