## Analytische Geometrie und Matrizen

1. Bestimmen Sie den Winkel $\theta$ zwischen den Vektoren $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt desjenigen Parallelogramms, dessen Seiten durch die folgenden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gegeben sind.

   a) $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Gegeben seien die folgenden Punkte:

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene $E$, die die 3 Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ enthält.

   b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade $g$, die durch $\mathbf{a}$ verläuft und senkrecht zu $E$ ist.

4. a) Sei $E$ die Ebene im $\mathbb{R}^3$, die durch den Punkt $P$ mit Ortsvektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ verläuft und die senkrecht auf dem Vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht. Bestimmen Sie eine Normalform und Koordinatenform von $E$.

   b) Sei $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $E$ die Ebene im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Bestimmen Sie eine Normalform von $E$ und prüfen Sie, ob der Punkt $\mathbf{p}$ in $E$ liegt. Bestimmen Sie ggf. den Abstand von $\mathbf{p}$ zu $E$.

5. Bestimmen Sie $\alpha$ und $\beta$, so dass $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}$, wobei $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

   a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. Betrachten Sie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & a \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 58 \\ 40 \\ 81 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie, für welche Werte von $a$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:
   - genau eine Lösung hat.
   - keine oder unendlich viele Lösungen hat.

7. Betrachten Sie die Abbildung $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, wobei

   a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

   Skizzieren Sie die punktweise Anwendung der linearen Abbildung $f_{\mathbf{A}}$ auf das Haus: