Vorkurs Mathematik

Exponentialfunktion und Logarithmus

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

TUHH

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Exponentialfunktionen

Potenz , Exponent

- Potenzfunktion: Basis variabel, Potenz fest (x^2, $\sqrt{x}$ etc.)
  Basis
- Exponentialfunktion: Basis fest, Potenz variabel (2^x, $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ oder allgemein a^x mit $a > 0$)
- Potenzgesetze gelten unverändert auch für Exponentialfunktionen, z.B. ist $2^{x+3} = 2^x 2^3 = 2^x \cdot 8$
- die wichtigste Basis ist die Eulersche Zahl $e = 2,718\dots$ (die zugehörige Exponentialfunktion e^x stimmt mit ihrer Ableitung überein)

Logarithmus

$f(x) = 2x$
$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$

$f(x) = x^2, \ x \geq 0$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \ x \geq 0$

Die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$ macht das Potenzieren a^x rückgängig, es gilt

$f^{-1}(f(x)) = x$ $\qquad$ $f(f^{-1}(x)) = x$ $\qquad$ $f(x) = a^x$

$$\log_a(a^x) = x \qquad \text{sowie} \qquad a^{\log_a(x)} = x.$$

$f^{-1}(x) = \log_a(x)$

Für die Basis $a = e$ schreibt man statt $\log_e(x)$ auch $\ln(x)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f(x)=y"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}(y)=x"] \end{tikzcd}$$

Rechengesetze:

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$

$$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_a(x^p) = p\log_a(x)$$

Basiswechsel:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

$\log_e(10) = \frac{\log_{10}(10)}{\log_{10}(e)}$

spezielle Schreibweisen: $\log(x)$ statt $\log_e(x)$, $\lg(x)$ statt $\log_{10}(x)$, $\mathrm{ld}(x)$ statt $\log_2(x)$

Exponential- und Logarithmusgleichungen

Falls die Variable im Logarithmus oder in der Potenz steht, wird dieselbe Lösungsstrategie wie bei Wurzelgleichungen angewendet:

- Zunächst den Logarithmus bzw. die Exponentialfunktion isolieren
- Exponentieren bzw. Logarithmieren
- die ersten beiden Schritte wiederholen, bis alle Logarithmen bzw. Exponentialfunktionen eliminiert sind
- die so erhaltene Gleichung mit bekannten Mitteln lösen