Vorkurs Mathematik

Rechenregeln

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

TUHH

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Zahlen

Aus der Schule kennen Sie die folgenden Zahlenmengen:

- $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen) $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{27}{121}, \ldots$
- $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen) $\pi, e, \sqrt{2},$

Zwei Zahlen können mit Hilfe der vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zu einer neuen Zahl verknüpft werden.

$3 - 2 = 3 + (-2)$ $\qquad$ $3 : 2 = 3 \cdot \frac{1}{2}$

Konventionen

- Klammern zuerst $3-(2-1)=3-1=2$
- Punkt- vor Strichrechnung $3\cdot 4-8=12-8=4$
- von links nach rechts $8-3\cdot 4$

$-3\cdot(5+2x^2-8x)=-3\cdot 5+(-3)\cdot 2x^2+(-3)(-8x)$

$-3x+8x^2-2 \qquad x=2y+4$

$-3\cdot(2y+4)+8(2y+4)^2-2$

Rechenregeln

- Assoziativgesetz: Summanden oder Faktoren können in beliebiger Reihenfolge zusamengerechnet werden, d.h. $(a+b)+c = a+(b+c)$ sowie $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- Kommutativgesetz: Summanden bzw. Faktoren können beliebig vertauscht werden, d.h. $a+b = b+a$ sowie $a \cdot b = b \cdot a$.
- Distributivgesetz: Treffen Punkt- und Strichrechnung aufeinander, kann man ausmultiplizieren, d.h. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c) = b+a+c = c+a+b$

$2+8+17+5+\ldots$

$2-7+8-2+6 = 2+(-7)+8+(-2)+6 = -7+2+8-2+6$

Klammern

- Aufgrund der Konvention „Punkt- vor Strichrechnung" sind manchmal Klammern notwendig:

- Um Minuszeichen vor einer Klammer aufzulösen hilft die Beobachtung $-(\ldots) = -1 \cdot (\ldots)$ Beispiel:

Binomische Formeln

Es gilt:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3-x)(3+x)$$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \underline{(a+b)}(a+b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b \\ &= a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) \\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Bruchrechnung

$a : b = \frac{a}{b}$

Es gilt:

- Erweitern bzw. Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$
- Addition/Subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

- Multiplikation/Division: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ sowie $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Potenzen

Für eine natürliche Zahl n und eine positive reelle Zahl a ist a^n eine Abkürzung für $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ mal}}$. Allgemeiner (aber mit einer etwas komplizierteren Interpretation), kann man a^p für eine beliebige reelle Zahl p definieren. Es gelten die folgenden Rechengesetze:

1. $(a^p)^q = a^{pq}$ $\quad (3^5)^2 = 3^{5\cdot 2} = 3^{10}$
2. $(ab)^p = a^p b^p$ $\quad (2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$
3. $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$ $\quad \dfrac{2^2}{3^2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$
4. $a^p a^q = a^{p+q}$ $\quad 3^2 \cdot 3^3 = 3^5$
5. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $\quad \dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

$\dfrac{3^{-2}}{3^{-3}} = 3^{-2-(-3)}$

$= 3^1 = 3$

$\dfrac{3^{-2}}{3^3} = 3^{-2-3}$

$= 3^{-5}$

$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$

$\dfrac{7^3 \cdot 5}{7^{-2}} = \dfrac{1 \cdot 5^1}{7^{-2} \cdot 7^{-3}} = \dfrac{1}{7^{-2} \cdot 7^{-3} \cdot 5^{-1}}$

$\dfrac{3^{-2} \cdot 5}{2^{-7}} = \dfrac{5}{3^2 2^{-7}} = \dfrac{5 \cdot 2^7}{3^2}$

Wurzeln

$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

Wurzeln sind spezielle Potenzen: $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$. Aus den Rechengesetzen für Potenzen erhalten wir:

1. $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a}$
2. $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}$ $\qquad \sqrt{9x^2} = \sqrt{9}\sqrt{x^2} = 3x$
3. $\dfrac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[p]{\dfrac{a}{b}}$

Für die Quadratwurzel $\sqrt[2]{a}$ schreiben wir $\sqrt{a}$. Da Wurzeln spezielle Potenzen sind, vertragen Sie sich erwartungsgemäß gut mit allgemeinen Potenzen:

$$a^{\overset{p \cdot \frac{1}{q}}{\frac{p}{q}}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p .$$

Prozentrechnen

Grundgleichung für Prozentrechnung

$$\frac{\text{Prozentsatz}}{100\%} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}}$$

$$\frac{x}{100\%} = \frac{y}{z}$$