Vorkurs Mathematik

Vorlesung 5 - Vektoren und Lineare Gleichungssysteme

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

Inhalt

Was ist ein Vektor?

Die Physik unterscheidet zwischen skalaren und vektoriellen Größen.

Skalare Größen sind durch einen **Zahlwert** (mit Einheit) charakterisiert.

Vektorielle Größen sind durch einen **Zahlwert** (mit Einheit) und eine **Richtung** charakterisiert.

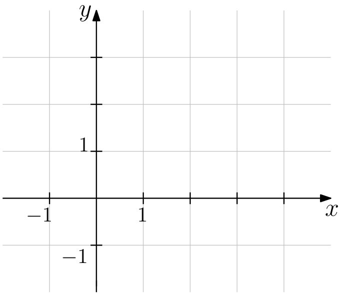
Vektorielle Größen werden oft durch Pfeile (Vektoren) dargestellt, deren Länge den Zahlwert repräsentiert.

In der **Analytischen Geometrie** nutzen wir Vektoren unter anderem zur Beschreibung von

- geometrischen Objekten (Geraden, Ebenen, Dreiecke etc.)
- geometrischen Operationen (Drehungen, Spiegelungen etc.)

Vektoren in der Ebene

Ebene: zwei Koordinatenachsen (bspw. x- und y-Achse) schneiden sich im Nullpunkt (Ursprung)

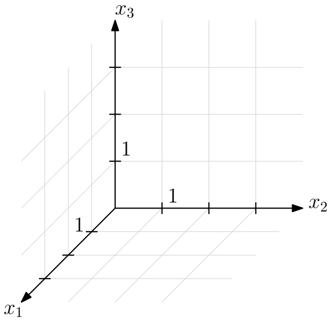


Ein Vektor in dieser Ebene ist ein Pfeil, von dem wir nur die Ausdehnung in x- und y-Richtung kennen.

Beispiel: $\mathbf{v} := \binom{3}{-2}$ ist ein Vektor, der bei einem beliebigen Fußpunkt startet und dann 3 Schritte in x-Richtung sowie -2 Schritte in y-Richtung läuft.

Vektoren im 3-dimensionalen Raum

3-dim Raum: drei Koordinatenachsen (bspw. x_1-, x_2- und x_3-Achse) schneiden sich im Nullpunkt (Ursprung)



Ein Vektor in diesem System ist ein Pfeil, von dem wir nur die Ausdehnung in x_1-, x_2- und x_3-Richtung kennen.

Beispiel: $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft 1 Schritt in x_1-Richtung, 3 Schritte in x_2-Richtung und 2 Schritte in x_3-Richtung.

Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Jedes Objekt $\mathbf{v}$ der Form

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$$

wird reeller Vektor genannt.

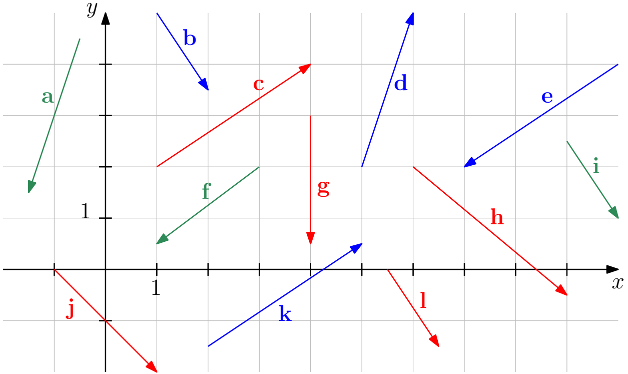
Die Menge aller solcher Vektoren bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^n$.

Die Einträge $v_1, v_2, \ldots, v_n$ werden Komponenten genannt.

Hinweis:

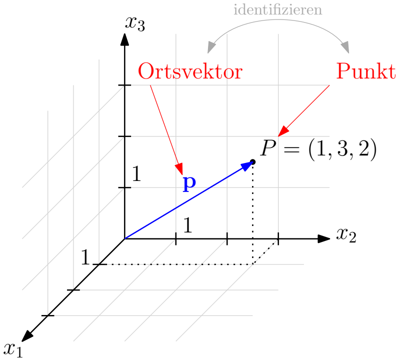
- *Wir betrachten heute nur den Fall $n \in \{2, 3\}$. In der Linearen Algebra werden wir aber häufig Vektoren mit größerem $n \in \mathbb{N}$ benötigen.*
- *In unterschiedlichen Vorlesungen werden sie unterschiedliche Notationen sehen: $\mathbf{v}$, $\vec{v}$, $\underline{v}$ etc.*

Übung



Übung: Welche der dargestellten Vektoren sind identisch? Geben Sie deren Komponentendarstellung an.

Punkt und Ortsvektor



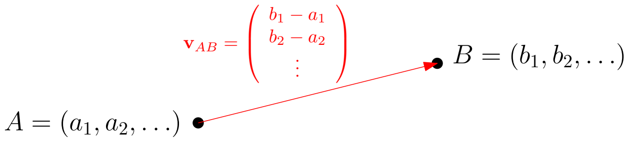
Definition (Ortsvektor)

Es sei O der Ursprung (des Koordinatensystems). Ist P ein Punkt, so wird der Vektor, der von O zu P führt, der Ortsvektor von P genannt. Häufig werden Punkte mit ihren Ortsvektoren identifiziert.

Vektor zwischen zwei Punkten

Vektor zwischen zwei Punkten

Sind zwei Punkte A und B gegeben, so ergibt sich der Vektor $\mathbf{v}_{AB}$, der von A nach B führt, indem man den Ortsvektor von A vom Ortsvektor von B subtrahiert.



Beispiel: Der Vektor, der von $A := (2, 4, -6)$ zu $B := (3, -1, 9)$ führt, ist

$$\mathbf{v}_{AB} =$$

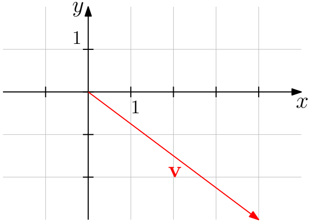
Länge eines Vektors

Länge eines Vektors

Gegeben sei ein beliebiger Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Länge des Vektors gleich

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}\,.$$

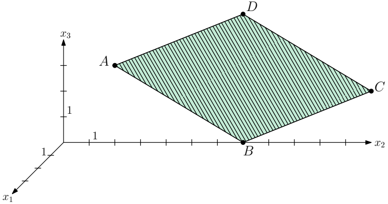
Beispiel: Die Länge des Vektors $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist ...



Übungsaufgabe

Ein Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, C, D liegt schief im Raum. Dabei seien die folgenden Eckpunkte bekannt:

$A := (2, 3, 4)$, $B := (0, 7, 0)$ und $D := (-2, 6, 4)$.



(i) Bestimmen Sie die Vektoren $\mathbf{v}_{AB}$ und $\mathbf{v}_{AD}$, die von A zu B bzw. D führen.

(ii) Wie lautet der Punkt C?

(iii) Bestimmen Sie den Umfang des Parallelogramms.

(iv) Bestimmen Sie die Länge der Diagonale AC.

Addition/Subtraktion von Vektoren

Addition/Subtraktion von Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Die Addition/Subtraktion zweier Vektoren im $\mathbb{R}^n$ erfolgt komponentenweise.
Genauer: Gegeben seien zwei Vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Dann definieren wir

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} - \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ \vdots \\ v_n - w_n \end{pmatrix} .$$

Addition/Subtraktion von Vektoren

Beispiele:

Skalare Multiplikation für Vektoren

Skalare Multiplikation für Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Die skalare Multiplikation für Vektoren im $\mathbb{R}^n$ erfolgt komponentenweise.

Genauer: Gegeben seien eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein Vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

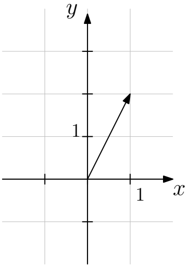
Dann definieren wir

$$\lambda \cdot \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix} .$$

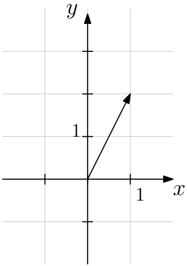
Skalare Multiplikation für Vektoren

Beispiele: Gegeben sei der Vektor $\mathbf{v} = \binom{1}{2}$. Man bestimme und zeichne die folgenden drei Vektoren:

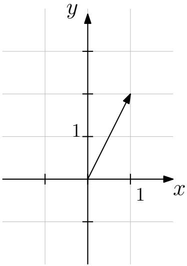
(i) $-1 \cdot \mathbf{v}$



(ii) $2 \cdot \mathbf{v}$



(iii) $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{v}$



Beispiele

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Rechenregeln

Rechenregeln in $\mathbb{R}^n$

Gegeben seien Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Kommutativität: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

(ii) Assoziativität: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(iii) Distributivität I: $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$

(iv) Distributivität II: $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$

Übung

(a) Berechnen Sie!

(i) $4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

Lösung:

Übung

(b) Bestimmen Sie jeweils einen Vektor $\mathbf{x}$, sodass die gegebene Gleichung erfüllt ist!

(i) $2\mathbf{x} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ii) $2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mathbf{x} \right) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Übung

(c) Bestimmen Sie Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Gleichung stimmt!

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Linearkombination

Linearkombination

Gegeben seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Dann wird der Vektor

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ genannt.

Man sagt auch, dass sich $\mathbf{v}$ aus den Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ erzeugen lässt.

Beispiel:

Spannraum

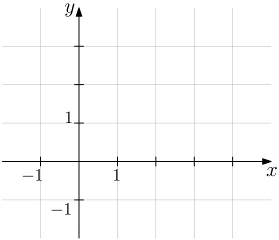
Spannraum

Gegeben seien Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

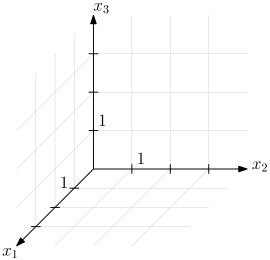
Die Menge aller Linearkombinationen aus den Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ wird als Spannraum (oder auch Lineare Hülle) von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ bezeichnet. Kurz:

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) := \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \ .$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$



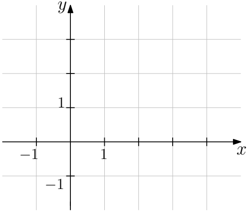
$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$



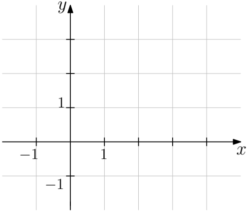
Übung

Skizzieren Sie die folgenden Spannräume!

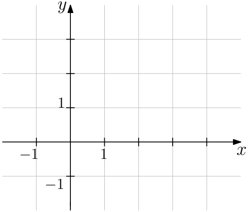
$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$



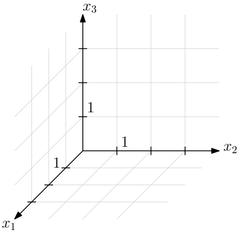
$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$



$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$



$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$



Linearkombination $\to$ Lineares Gleichungssystem

Eine häufig in der Linearen Algebra auftretende Frage ist:
„Lässt sich ein gegebener Vektor $\mathbf{v}$ als Linearkombination anderer Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ schreiben?“

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{x_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{x_2} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \boxed{x_3} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Frage, ob ein gewisses *lineares Gleichungssystem* lösbar ist:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 8 & = & 1x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 \\ 17 & = & 2x_1 & - & 5x_2 & + & 9x_3 \\ 0 & = & -1x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem

Lineares Gleichungssystem

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist von der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \ . \end{aligned}$$

Dabei sind a_{ij} und b_i (meist reelle) Zahlen. Eine Belegung von $x_1, \ldots, x_n$ mit Werten, sodass alle Gleichungen zugleich erfüllt sind, wird Lösung des Gleichungssystems genannt. Solch eine Belegung geben wir als Vektor an.

Lineares Gleichungssystem

Beispiel: Das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 17 \\ -1x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

ist ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen.

Eine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Gleichsetzungsverfahren

Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren werden 2 Gleichungen nach derselben Variable umgestellt und die resultierenden Terme gleichgesetzt. Es entsteht somit eine Gleichung, die eine der vorhandenen Variablen nicht enthält.

Beispiel: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 15 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & = & -9 \end{array}$$

Einsetzungsverfahren

Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren wird eine Gleichung nach einer Variable umgestellt und diese dann in den anderen Gleichungen ersetzt. Es entstehen somit Gleichungen, die eine der vorhandenen Variablen nicht enthalten.

Beispiel: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 15 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & = & -9 \end{array}$$

Übung

(a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 4\,. \end{array}$$

Lösung:

Übung

(b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & 8x_2 & = & 14 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & -3\,. \end{array}$$

Lösung:

Graphisches Lösen

Graphisches Lösen (2 Variablen)

Beim graphischen Lösen eines linearen Gleichungssystems mit 2 Variablen werden die Gleichungen als Geraden verbildlicht. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems entspricht dann der Schnittmenge aller Geraden.

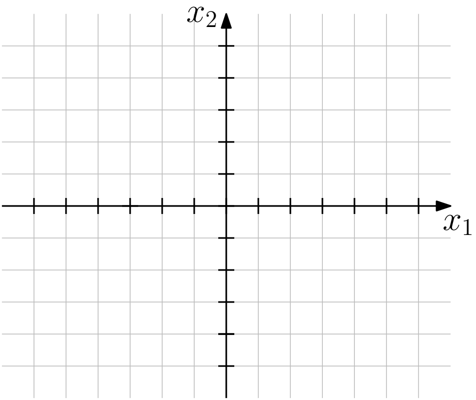
Beispiel: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem graphisch:

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array}$$

Graphisches Lösen

Beispiel: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem graphisch:

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array}$$

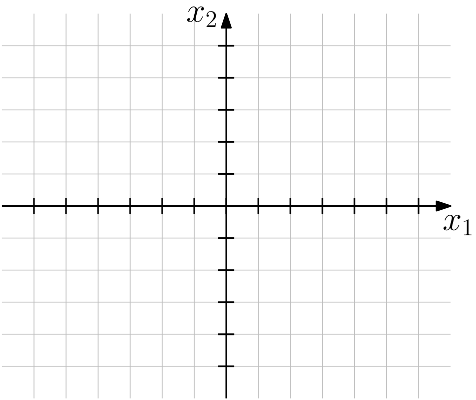


Notizen:

Übung

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem graphisch:

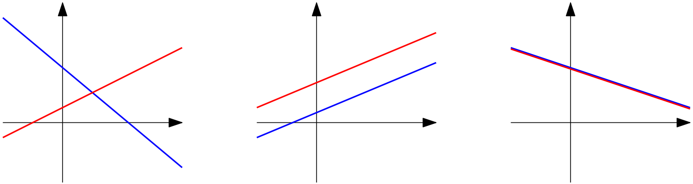
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \end{array}$$



Notizen:

Lösbarkeit: Anzahl Lösungen

Es gibt 3 mögliche Schnittmengen für Geraden:



Schnittpunkt (eine Lösung) | parallel (keine Lösung) | identisch (unendl. viele Lösungen)

Allgemein gilt sogar Folgendes:

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Jedes lineare Gleichungssystem hat entweder (i) genau eine Lösung oder (ii) keine Lösung oder (iii) unendlich viele Lösungen.

Eliminationsverfahren

Eliminationsverfahren

Beim Eliminationsverfahren (Additionsverfahren) werden zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) addiert/subtrahiert, sodass mindestens eine Variable eliminiert wird.

Beispiel 1: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 15 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & = & -9 \end{array}$$

Eliminationsverfahren

Eliminationsverfahren

Beim Eliminationsverfahren (Additionsverfahren) werden zwei Gleichungen (oder Vielfache davon) addiert/subtrahiert, sodass mindestens eine Variable eliminiert wird.

Beispiel 2: Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 5x_2 & = & 2 \\ -8x_1 & + & 10x_2 & = & -4 \end{array}$$

Übung

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren:

(a) $$\begin{array}{rcrcr} 1x_1 & - & 4x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 9x_1 & - & 6x_2 & = & 13 \end{array}$$

Lösung:

Größere lineare Gleichungssysteme lösen

Beobachtungen

- Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn die Reihenfolge der Gleichungen getauscht wird.
- Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn genau eine Zeile (mehrfach) von anderen Zeilen abgezogen wird.

Rechenrezept:

- Überführe das Lineare Gleichungssystem in eine „Dreiecksform“ oder „Stufenform“
- Bestimme anschließend die Lösungsmenge.

Beispiel

Wir bestimmen die eindeutige Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ -1x_1 & + & 1x_2 & + & 9x_3 & = & -13 \end{array}$$

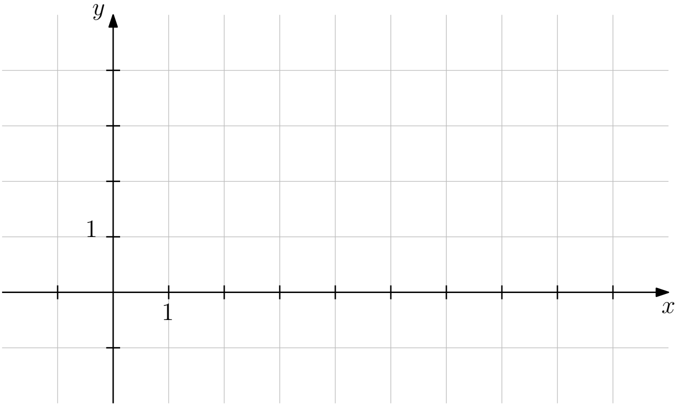
Übung

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 11x_2 & - & 5x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 14 \end{array}$$

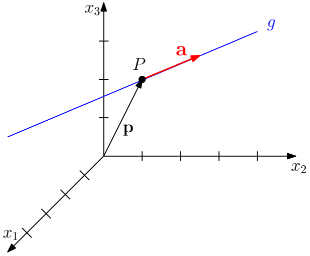
Geraden darstellen

Frage: Wie können wir beliebige Geraden beschreiben?



Geraden darstellen

Idee: Eine Gerade ist eindeutig festgelegt, wenn wir einen Punkt und die Richtung der Geraden kennen.



Jeder Punkt auf der Geraden g lässt sich von P aus erreichen, indem man ein Vielfaches von $\mathbf{a}$ läuft.

Also lässt sich jeder Punkt auf g durch einen Ortsvektor der Form $\mathbf{p}+\lambda\mathbf{a}$ beschreiben

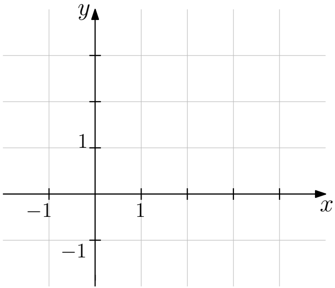
Parameterdarstellung einer Geraden

Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der folgenden Form schreiben:

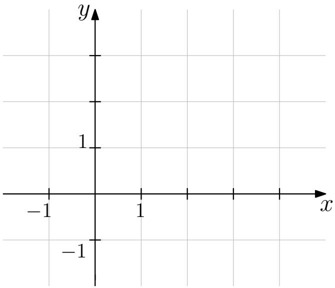
$$g = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} : \ \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbf{p} + \mathsf{Span}(\mathbf{a}),$$

wobei die Punkte auf g durch ihre Ortsvektoren identifiziert werden. Diese Darstellung heißt Parameterform. Dabei repräsentiert $\mathbf{p}$ einen beliebigen Punkt auf g und $\mathbf{a}$ beschreibt die Richtung der Geraden.

Beispiel

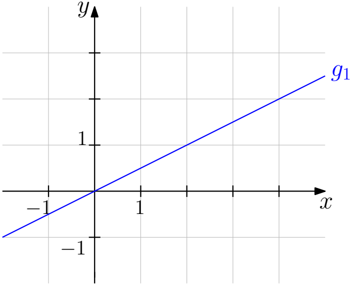


$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} : \; r \in \mathbb{R} \right\}$$

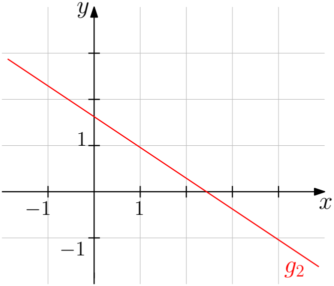


$$g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Beispiel



$g_1 =$



$g_2 =$

Übung

(a) Beschreiben Sie die Gerade g_1, welche durch die Punkte

$$A := (0, 1, 2) \quad \text{und} \quad B := (-2, 7, 10)$$

verläuft mit Hilfe einer Parameterdarstellung.

(b) Beschreiben Sie die Gerade g_2, welche durch die Punkte

$$C := (5, 4, -4) \quad \text{und} \quad D := (-1, -5, -1)$$

verläuft mit Hilfe einer Parameterdarstellung.

(c) Zusatz: Haben die Geraden g_1 und g_2 einen Schnittpunkt? Falls ja, wie lautet dieser?

Lagebeziehungen

Lagebeziehungen für Geraden erkennen

Zwei Geraden g_1 und g_2 seien durch Parameterdarstellungen gegeben:

$$g_1 = \{\mathbf{p}_1 + \lambda_1 \mathbf{r}_1 : \ \lambda_1 \in \mathbb{R}\},$$
$$g_2 = \{\mathbf{p}_2 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 : \ \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Um die Lagebeziehung zu bestimmen, kann man beide Darstellungen gleichsetzen und das resultierende LGS (mit Variablen λ_1, λ_2) lösen:

$$\mathbf{p}_1 + \lambda_1 \mathbf{r}_1 = \mathbf{p}_2 + \lambda_2 \mathbf{r}_2$$

Es gibt vier Fälle:

genau eine Lösung	Schnittpunkt (λ_1 bzw. λ_2 in die Parameterformen einsetzen)
unendlich viele Lösungen	die Geraden sind identisch
keine Lösung (λ_1, λ_2) & $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sind Vielfache voneinander	die Geraden sind parallel, aber nicht identisch
keine Lösung (λ_1, λ_2) & $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sind keine Vielfache	die Geraden sind windschief