Vorkurs Mathematik

Vorlesung 6 - Analytische Geometrie und Matrizen

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

TUHH

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Inhalt

1. Analytische Geometrie II
   - Skalarprodukt, Kreuzprodukt
   - Orthogonalität
   - Ebenen beschreiben
   - Lagebeziehungen
2. Matrizen
   - Grundlegende Rechenoperationen
   - Abbildungen der Form $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$

Skalarprodukt, Norm und Winkel

Standard-Skalarprodukt (Definition)

Es seien

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir das (Standard-)Skalarprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ wie folgt:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k \ .$$

Insbesondere lässt sich die Länge $\|\mathbf{v}\|$ von $\mathbf{v}$ (auch Norm genannt) wie folgt beschreiben:

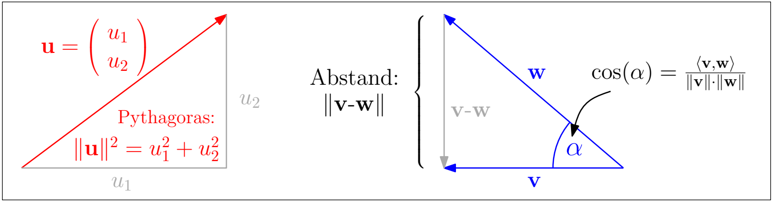
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\,.$$

Skalarprodukt, Norm und Winkel

Länge, Abstand, Winkel

Es seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das Standard-Skalarprodukt und $\| \cdot \|$ bezeichne die Norm. Dann ist

- $\|\mathbf{v}\|$ die Länge des Vektors $\mathbf{v}$,
- $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ der Abstand der Punkte $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$,
- der Winkel α zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ durch $\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}$ gegeben.



Skalarprodukt, Norm und Winkel

Übung: Gegeben seien $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Längen der beiden Vektoren.

(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$.

Skalarprodukt, Norm und Winkel

Übung: Gegeben seien $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Zusatz: Für welchen Wert $x \in \mathbb{R}$ ist der Abstand zwischen

$$\mathbf{u}_x := \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{v}$ am kleinsten?

Orthogonalität

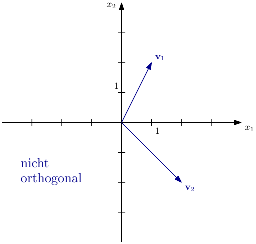
Orthogonalität

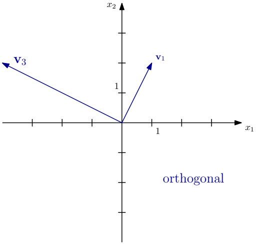
Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sind genau dann senkrecht (orthogonal) zueinander, wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ gilt.

Beispiel: Wir betrachten die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -2$ und $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$. Also sind $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_3$ orthogonal. Die Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind aber nicht orthogonal.





Orthogonalität

Orthogonalität

Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sind genau dann senkrecht (orthogonal) zueinander, wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ gilt.

Übung: Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $A := (-1, 0, 1)$, $B := (1, 2, 3)$ und $C := (-2, 2, 0)$.

(i) Geben Sie die Vektoren an, die von A nach B, von A nach C bzw. von B nach C führen.

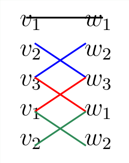
(ii) Überprüfen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist.

Kreuzprodukt

Kreuzprodukt (Definition)

Es seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann definieren wir das Kreuzprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ wie folgt: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$.

Mnemonic



- ⇝ schreibe die Vektoren nebeneinander und schreibe jeweils die ersten beiden Komponenten noch einmal darunter
- ⇝ streiche die erste Zeile
- ⇝ berechne die Einträge von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ über die eingezeichneten Kreuze:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

Kreuzprodukt (Definition)

Es seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann definieren wir das Kreuzprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ wie folgt: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$.

Beispiel:

Kreuzprodukt

Kreuzprodukt (Definition)

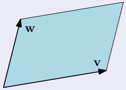
Es seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann definieren wir das Kreuzprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ wie folgt: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$.

Wichtige Eigenschaften

(a) Das Kreuzprodukt ist nur auf $\mathbb{R}^3$ definiert!!!

(b) Der Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}$ und orthogonal zu $\mathbf{w}$.

(c) Das Parallelogramm, dessen Seiten durch $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ beschrieben werden, hat den Flächeninhalt $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$.



Übungsaufgabe

(a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Übungsaufgabe

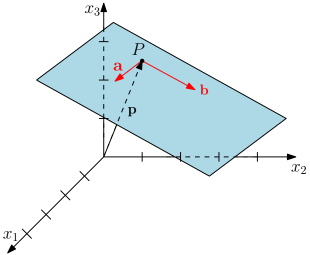
(b) Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(i) Bestimmen Sie einen Vektor, der zu $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ orthogonal ist.
(ii) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Paralellogramms, welches durch die Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ begrenzt wird.
(iii) Bestimmen Sie einen Vektor, der zu $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ orthogonal ist und dessen Länge gleich 1 ist.

Ebenen darstellen: Parameterform

Idee: Eine Ebene ist eindeutig festgelegt, wenn wir einen Punkt und zwei Vektoren, die nicht denselben Richtungssinn haben, innerhalb der Ebene kennen.



Jeder Punkt auf der Ebene E lässt sich von P aus erreichen, indem man eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ läuft.

Also lässt sich jeder Punkt auf E durch einen Ortsvektor der Form $\mathbf{p}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ beschreiben

Parameterdarstellung einer Ebene

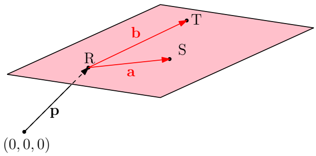
Jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$E = \{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} :\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbf{p} + \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

wobei die Punkte auf E durch ihre Ortsvektoren identifiziert werden. Diese Darstellung heißt Parameterform.

Beispiel

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es genau eine Ebene E, auf der die Punkte $R := (1, 1, 1)$, $S := (1, 3, 2)$ und $T := (-1, 4, 3)$ liegen. Man bestimme eine Parameterform von E.



Übung

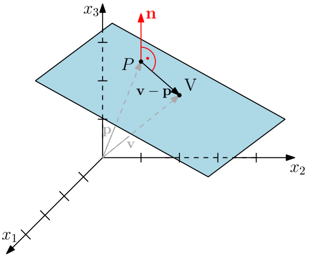
(a) Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene E, welche durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A := (6, 3, 0), \quad B := (-3, 10, 2) \;\text{ und }\; C := (5, 3, 3)\,.$$

(b) Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene F, welche durch den Punkt $D := (9, 1, 9)$ verläuft und parallel zu E ist.

Ebenen darstellen: Normalform

Idee: Eine Ebene E ist im $\mathbb{R}^3$ eindeutig festgelegt, wenn wir einen Punkt der Ebene E und einen zu E senkrechten Vektor (ungleich $\mathbf{o}$) kennen.



Es sei $\mathbf{n}$ ein Vektor, der senkrecht auf E steht.

Für jeden Punkt V auf E ist der Vektor **v-p** zwischen P und V orthogonal zu $\mathbf{n}$.

Also gilt $\langle \mathbf{v}\text{-}\mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$ für jeden Ortsvektor $\mathbf{v}$ eines Punktes auf E.

Normalform einer Ebene im $\mathbb{R}^3$

Jede Ebene E im $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$E = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \ \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0 \right\} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \ \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \right\}.$$

Dabei repräsentiert $\mathbf{p}$ einen beliebigen Punkt auf E. Der Vektor $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$ ist ein Normalenvektor von E, d.h. er ist orthogonal zu E. Diese Darstellung heißt Normalform.

Ebenen darstellen: Koordinatenform

Koordinatenform einer Ebene

Jede Ebene E im $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$E = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d \right\}$$

darstellen, wobei $a_1, a_2, a_3, d \in \mathbb{R}$. Die Darstellung heißt Koordinatenform.

Die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$ beschreibt, welche Bedingung ein Punkt (x_1, x_2, x_3) erfüllen muss, damit dieser zur Ebene gehört.

Koordinatenform bestimmen

Ist eine Ebene E in Normalform $E = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \; \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0 \right\}$ gegeben, so lässt sich eine Koordinatengleichung wie folgt finden:

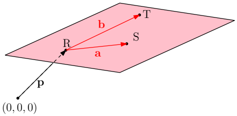
Setze $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und forme die Gleichung $\langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$ in eine Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$ um.

Beispiel

Beispiel: Im $\mathbb{R}^3$ gibt es genau eine Ebene E, auf der die Punkte $R := (1,1,1)$, $S := (1,3,2)$ und $T := (-1,4,3)$ liegen.

Wir kennen schon eine Parameterform von E:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$



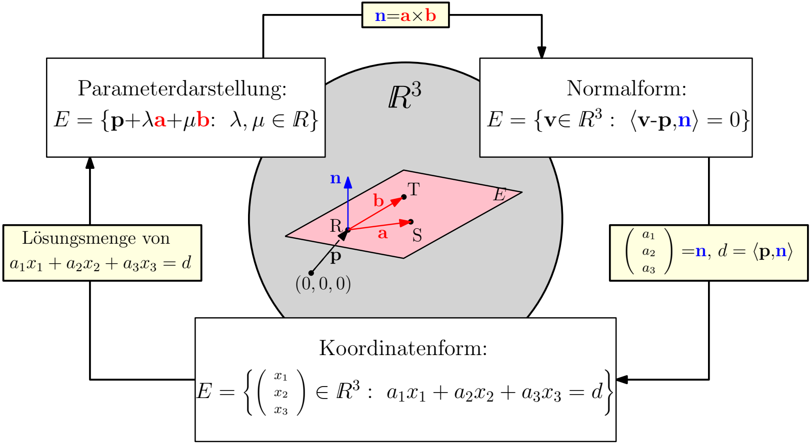
Übung

Geben Sie die folgenden Ebenen in Koordinatenform an:

(i) $$E_1 := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \mathbf{v} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

(ii) $$E_2 := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Überblick: Darstellungen



Hesse-Normalform und Abstand

Hesse-Normalform (Definition)

Eine Normalform $\left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \ \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0\right\}$ einer Ebene wird Hesse-Normalform genannt, falls die Länge von $\mathbf{n}$ gleich 1 ist. ($\|n\| = 1$)

Bemerkung: Eine Normalform lässt sich stets in eine HNF überführen, indem man den vorliegenden Normalenvektor durch dessen Länge teilt.

Hesse-Normalform und Abstand

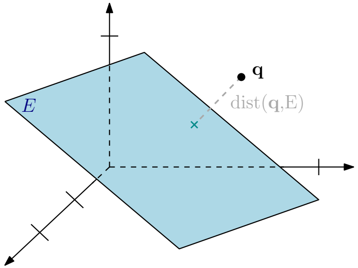
Hesse-Normalform (Definition)

Eine Normalform $\left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0\right\}$ einer Ebene wird Hesse-Normalform genannt, falls die Länge von $\mathbf{n}$ gleich 1 ist. ($\|n\| = 1$)

Abstand Punkt/Ebene

Sind ein Punkt (Ortsvektor) $\mathbf{q}$ und eine Ebene in Hesse-Normalform $E = \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0\right\}$ gegeben, ist der Abstand zwischen $\mathbf{q}$ und E gleich

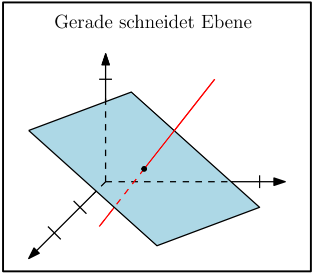
$$|\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle| \,.$$

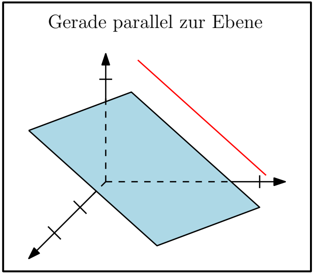


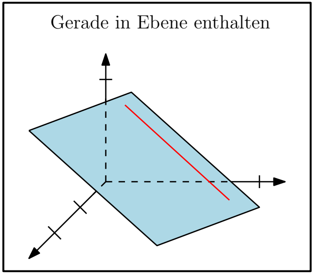
Hesse-Normalform und Abstand

Übung: Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt (Ortsvektor) $\mathbf{q} := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

Lagebeziehung: Gerade und Ebene







Lagebeziehung: Gerade und Ebene

Schema: Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

Angenommen eine Gerade g ist in Parameterform

$$g = \{\mathbf{p} + \lambda \mathbf{a} : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gegeben und eine Ebene E ist in Koordinatenform gegeben.

Dann kann man die 3 Komponenten des allgemeinen Vektors $\mathbf{p} + \lambda \mathbf{a}$ der Geraden g in die Gleichung der Koordinatenform von E einsetzen. Das liefert eine Gleichung mit der Variablen λ und es gibt drei Fälle:

- die Gleichung hat keine Lösung: dann haben g und E keinen gemeinsamen Punkt.
- die Gleichung hat genau eine Lösung λ: dann gibt es einen Schnittpunkt. Dessen Ortsvektor ergibt sich, wenn man die Lösung λ in den allgemeinen Vektor $\mathbf{p} + \lambda \mathbf{a}$ einsetzt.
- die Gleichung hat unendlich viele Lösungen: g ist in E enthalten.

Lagebeziehung: Gerade und Ebene

Beispiel: Man prüfe, ob die folgende Gerade g und die folgende Ebene E einen Schnittpunkt haben:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \right\}.$$

Lagebeziehung: Gerade und Ebene

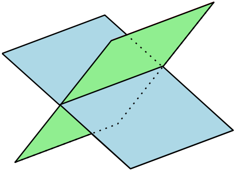
Übung: Bestimmen Sie die Lagebeziehung der folgenden Ebene E und der folgenden Gerade g:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; 3x_1 - 4x_2 + 2x_2 = 12 \right\}$$

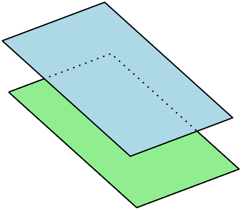
$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} : \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Lagebeziehung zwischen Ebenen

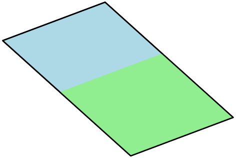
Ebenen schneiden sich in einer Geraden



Ebenen parallel zueinander



Ebenen sind identisch



Lagebeziehung zwischen Ebenen

Schema: Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Angenommen zwei Ebenen E_1 und E_2 sind in Koordinatenform gegeben. Dann muss jeder gemeinsame Punkt (x_1, x_2, x_3) beide Koordinatengleichungen erfüllen; das liefert ein LGS der Form

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= d \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= e\,. \end{aligned}$$

Es gibt drei Fälle:

- das LGS hat keine Lösung: dann haben E_1 und E_2 keinen gemeinsamen Punkt (und sind parallel).
- das LGS ist lösbar, wobei die beiden Gleichungen keine Vielfachen voneinander sind: dann schneiden sich die Ebenen in einer Geraden, welche die Lösungsmenge des LGS ist.
- das LGS ist lösbar, wobei die beiden Gleichungen Vielfache voneinander sind: dann sind die Ebenen identisch.

Übungsbeispiele später

Erinnerung: Lineare Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist von der Form

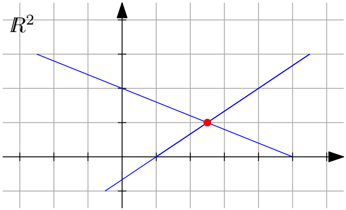
$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m\ .
\end{aligned}$$

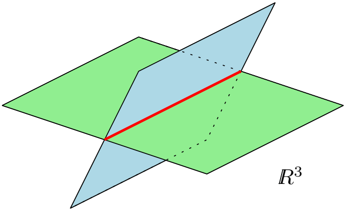
Dabei sind a_{ij} und b_i (meist reelle) Zahlen. Eine Belegung von $x_1, \ldots, x_n$ mit Werten, sodass alle Gleichungen zugleich erfüllt sind, wird Lösung des Gleichungssystems genannt. Solch eine Belegung geben wir als Vektor an.

LGS: Zeilensicht

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Gleichungen beschreiben
Geraden ($\mathbb{R}^2$),
Ebenen ($\mathbb{R}^3$),
Hyperebenen ($\mathbb{R}^n$)
Lösungsmenge ist deren
Schnittmenge





LGS lösen $\widehat{=}$ Schnittmengen von Hyperebenen bestimmen

LGS: Spaltensicht

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}}$$

$\Downarrow$ umschreiben

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

LGS lösen $\widehat{=}$ Linearkombination bestimmen

LGS: Schreibfaulheit

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ umschreiben

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Reelle Matrix

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann wird

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit allen } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

reelle Matrix genannt. Die Menge aller solchen Matrizen wird mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet. m heißt Zeilenzahl und n heißt Spaltenzahl der Matrix $\mathbf{A}$.

Grundrechenarten

Die Addition, die Subtraktion und die (skalare) Multiplikation werden für Matrizen komponentenweise definiert, analog zu Vektoren.

Beispiel:

Lösung

(a) Berechnen Sie!

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{X}$, sodass die folgende Gleichung stimmt.

$$3 \cdot \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor-Produkt

Definition

Eine Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und ein Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ seien gegeben. Dann wird das Produkt $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ wie folgt definiert:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} := \mathbf{a}_1 x_1 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n \ .$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{A}$ muss so viele Spalten haben, wie der Vektor $\mathbf{x}$ Komponenten hat.
- Das Produkt $\mathbf{Ax}$ ist eine Linearkombination aus den Spalten von $\mathbf{A}$.

LGS: Abbildungssicht

Ziel: Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösen $\quad (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m)$

Alternativ: betrachte Funktion $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

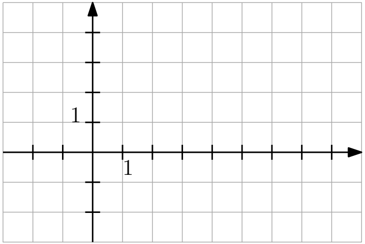
$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

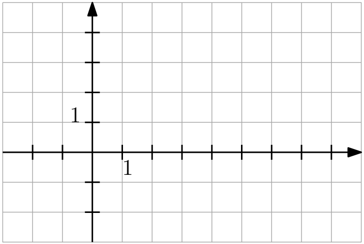
und löse $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Beispiele

Wir betrachten die Abbildung $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_{\mathbf{A}}(x) = \mathbf{A} \cdot x$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

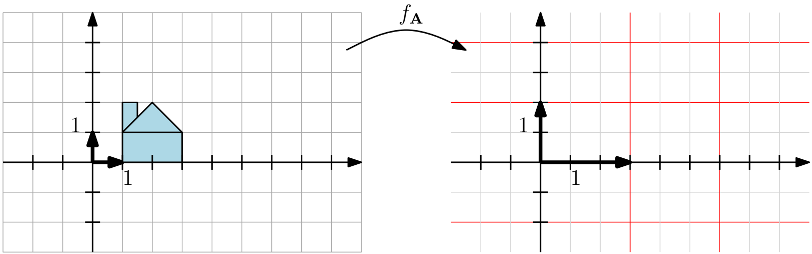




Beispiele

Wir betrachten die Abbildung $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_{\mathbf{A}}(x) = \mathbf{A} \cdot x$ mit

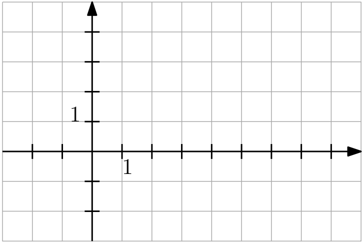
$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

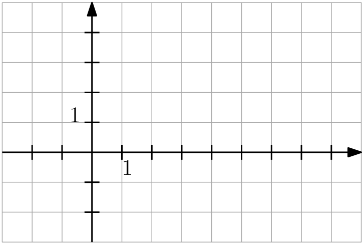


Beispiele

Wir betrachten die Abbildung $h_{\mathbf{B}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h_{\mathbf{B}}(x) = \mathbf{B} \cdot x$ mit

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

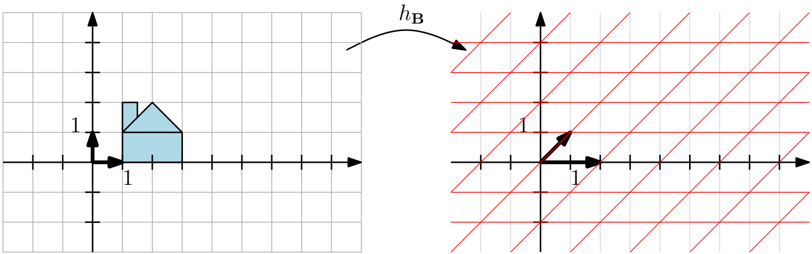




Beispiele

Wir betrachten die Abbildung $h_{\mathbf{B}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h_{\mathbf{B}}(x) = \mathbf{B} \cdot x$ mit

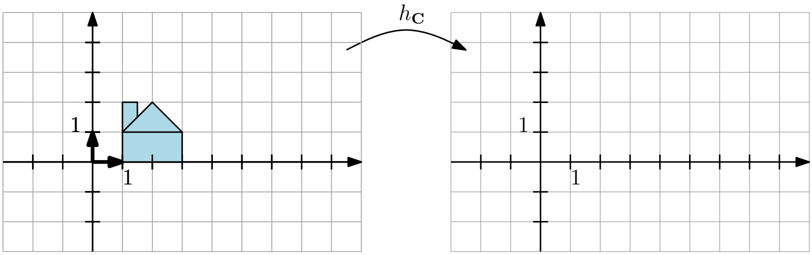
$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Beispiele

Wir betrachten die Abbildung $h_{\mathbf{C}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h_{\mathbf{C}}(x) = \mathbf{C} \cdot x$ mit

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



Übung: (a) Skizzieren Sie das zugehörige Haus im rechten Koordinatensystem.

(b) Für welchen Vektor $\mathbf{x}$ gilt $f_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Geometrische Operationen

Mit Abbildungen der Form $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ können geometrische Operationen beschrieben werden.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Spiegelung an x_1-Achse
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Spiegelung an x_2-Achse
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	Streckung um den Faktor a
$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	Drehung um den Winkel α am Ursprung