

Vorkurs Mathematik

Differentialrechnung

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten



Ableitung elementarer Funktionen und Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
$c \ (c \in \mathbb{R})$	0
$x^\alpha \ (\alpha \neq 0)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
$a^x \ (a > 0)$	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x) \ (a > 0)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Faktorregel: Für $c \in \mathbb{R}$

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

Summenregel:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

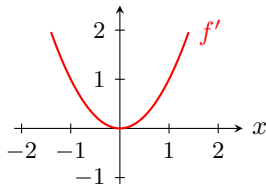
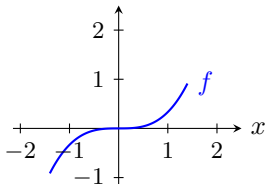
Kettenregel:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Differenzierbarkeit und Monotonie

Für $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar:

- ▶ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in D \iff f$ monoton wachsend
- ▶ $f'(x) > 0$ für alle $x \in D \implies f$ streng monoton wachsend
- ▶ $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in D \iff f$ monoton fallend
- ▶ $f'(x) < 0$ für alle $x \in D \implies f$ streng monoton fallend



⚠ Beachte, dass $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ nur hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für strenge Monotonie ist.

Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, str. monoton steigend, aber $f'(0) = 0$

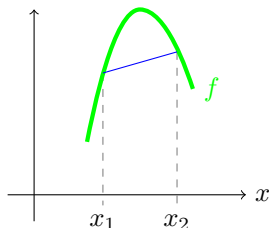
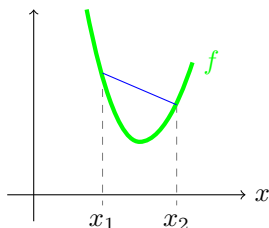
Zweite Ableitung und Konvexität/Konkavität

Für D Intervall, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- ▶ f **konvex**, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ und $\lambda \in (0, 1)$:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

- ▶ f **streng konvex**, falls „ $<$ “ anstatt „ \leq “
- ▶ f **(streng) konkav**, falls $-f$ (streng) konvex,
also „ \geq “ („ $>$ “) anstatt „ \leq “ („ $<$ “)



Für f zweimal differenzierbar:

- ▶ $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D \iff f$ konvex.
- ▶ $f''(x) > 0$ für alle $x \in D \implies f$ streng konvex.
- ▶ $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D \iff f$ konkav.
- ▶ $f''(x) < 0$ für alle $x \in D \implies f$ streng konkav.

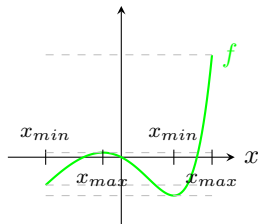
Lokale Extrema

Für $D \subset \mathbb{R}$ und Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

$x_0 \in D$ heißt

- ▶ **lokales Maximum**, falls es eine Umgebung U um x_0 gibt, sodass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$
- ▶ **lokales Minimum**, falls es eine Umgebung U um x_0 gibt, sodass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U$
- ▶ **lokales Extremum**, falls es lokales Maximum oder lokales Minimum ist.
- ▶ **globales Maximum**, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
- ▶ **globales Minimum**, falls $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$.

Umgebung um x_0 = (beliebig kleines) offenes Teilintervall von D , das x_0 enthält.



Satz

Für $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in D$ innerer Punkt:

Falls f lokales Extremum in x_0 hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

⚠ Für lokale Extrema in Randpunkten x_0 kann $f'(x_0) \neq 0$ gelten.

$x_0 \in D$ **stationärer Punkt**, falls $f'(x_0) = 0$.

Kriterien für Extrema

Für $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in (a, b)$ stationärer Punkt:

... mittels erster Ableitung:

Satz

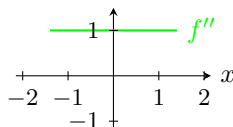
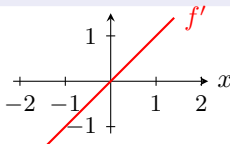
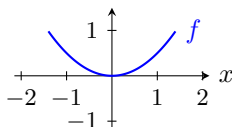
- ▶ Falls $f'(x) \geq 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) \leq 0$ für $x > x_0$, dann hat f ein lokales Maximum in x_0 .
- ▶ Falls $f'(x) \leq 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) \geq 0$ für $x > x_0$, dann hat f ein lokales Minimum in x_0 .

... mittels zweiter Ableitung:

Satz

Für f zweimal differenzierbar:

- ▶ Falls $f''(x_0) < 0$, dann hat f lokales Maximum in x_0 .
- ▶ Falls $f''(x_0) > 0$, dann hat f lokales Minimum in x_0 .



Wendepunkte

Für $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$:

f hat **Wendepunkt** in x_0 , falls die zweite Ableitung das Vorzeichen wechselt.

Satz (Kriterien für Wendepunkte)

- ▶ Falls f zweimal differenzierbar ist und einen Wendepunkt in x_0 hat, dann ist $f''(x_0) = 0$.
- ▶ Falls f dreimal differenzierbar ist, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f einen Wendepunkt in x_0 .