Vorkurs Mathematik

Logik

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

TUHH

Institut für Mathematik

Inhalt

Aussage

Definition (Aussage)

Eine Aussage ist die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts in Form eines Satzes einer natürlichen oder künstlichen Sprache, welcher entweder wahr oder falsch ist.

Beispiel: Welche der folgenden Sätze sind Aussagen im obigen Sinne?

- Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.
- Bitte öffne die Tür.
- $3 > 7$
- Wie geht es dir?
- $1 + 2$

Verknüpfung von Aussagen

Seien A und B zwei Aussagen.

Konjuktion

Die Aussage „A und B “ ...

- ist wahr, wenn beide Teilaussagen A und B wahr sind.
- ist falsch, wenn mindestens eine der Teilaussagen A und B falsch ist.

✎ $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel: $A :=$ Das Essen ist süß. $B :=$ Das Essen ist sauer.

$A \wedge B =$

Entweder A, oder B
$A \dot{\vee} B$ (ebenfalls andere Zeichen möglich)
A XOR B

Disjunktion

Die Aussage “A oder B” ...

- ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist.
- ist falsch, wenn beide Aussagen A und B falsch sind.

✎ $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel: $A :=$ Heute scheint die Sonne. $B :=$ Heute regnet es.

Welches Wetter haben wir heute, wenn $A \vee B$?

Verknüpfung von Aussagen

Implikation (Wenn ..., dann ...)

Die Aussage "A impliziert B" ...

wahr

- ist falsch, wenn A ~~falsch~~ ist und B falsch ist.
- ist wahr, wenn A falsch ist oder B wahr ist.

✎ $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiel: A B $x > 2 \Rightarrow x < 0$

- Es regnet. $\Rightarrow$ Die Straße ist nass.
- Das Handy klingelt. $\Rightarrow$ Die Batterie ist nicht leer.

Andere Möglichkeiten "$A \Rightarrow B$" in Worten zu beschreiben sind

- Aus A folgt B.
- A ist *hinreichend* für B.
- Ohne B kann A nicht eintreten.
- B ist *notwendig* für A.
- A impliziert B. (impliziert = nach sich zieht)

Beispiel: Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Eine Oma macht ihrem Enkel folgendes Versprechen:

„Wenn du den Mathe-Test bestehst,
dann schenke ich dir ein Fahrrad."

Wann lügt die Oma?
Das Versprechen der Oma ist von der Form $A \Rightarrow B$ mit

- Aussage A: „Der Enkel besteht den Mathe-Test",
- Aussage B: „Die Oma kauft ein Fahrrad für ihren Enkel".

Die Oma lügt, wenn A erfüllt ist und B nicht (Zeile 2).
Wenn die Oma ein Fahrrad kauft, lügt sie nicht (Zeile 1).
Falls der Enkel den Test nicht besteht, dann kann die Oma ihr Versprechen nicht brechen (Zeilen 3, 4).

Verknüpfung von Aussagen

Äquivalenz (... genau dann, wenn ...))

Die Aussage "A ist äquivalent zu B" ...

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

- wahr ist, wenn von den Teilaussagen A und B entweder beide wahr sind oder beide falsch sind.
- falsch ist, wenn eine der Teilaussagen A und B wahr ist, während die andere falsch ist.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

✎ $A \Leftrightarrow B$

Beispiel: Die Klausur ist **genau dann** bestanden, **wenn** mindestens 50% der Punkte erreicht wurden.

Andere Möglichkeiten "$A \Leftrightarrow B$" in Worten zu beschreiben sind

- Aus A folgt B und aus B folgt A.
- A gilt genau dann, wenn B gilt.
- A ist *hinreichend* und *notwendig* für B.

Negation

Negation

$\bar{A}$

Die Negation von A ist diejenige Aussage, die ...

- wahr ist, wenn A falsch ist.
- falsch ist, wenn A wahr ist.

✎ $\neg A$

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beobachtung:
B ist die Negation von A genau dann, wenn beide Aussagen A und B niemals gleichzeitig wahr sind und niemals gleichzeitig falsch sind..

Beispiel:
Was ist die Negation der folgenden Aussage?
$R :=$ „In diesem Zimmer gibt es einen roten Stuhl..“

- $A :=$ „In diesem Zimmer gibt es keine Stühle..”
- $B :=$ „In diesem Zimmer gibt es einen Stuhl, der nicht rot ist..“
- $C :=$ „Alle Stühle in diesem Zimmer sind grün..“
- $D :=$ „Alle Stühle in disem Zimmer sind nicht rot..“

Negation von Aussagen mit UND/ODER

Seien A und B zwei Aussagen $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

- Die Negation der Aussage „A **und** B“ ist „nicht A **oder** nicht B“.
- Die Negation der Aussage „A **oder** B“ ist „nicht A **und** nicht B“.

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Begründung:

A	B	$A \wedge B$ A and B	$\neg A$ not A	$\neg B$ not B	$(\neg A) \vee (\neg B)$ (not A) or (not B)	$\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w

$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$

Aussageformen und Quantoren

Definition (Aussageform)

Eine Aussage, die von einer Variablen abhängt, wird Aussageform genannt.

Beispiel: Es sei $A(x, y)$ die Aussageform „Das Doppelte von x ist kleiner als y.

$2x < y$

- $A(2, 5)$ ist wahr
- $A(3, 5)$ ist falsch

$A(x) \Leftrightarrow 2 < 4$

allquantor

✎	Bedeutung
$\forall x : A(x)$	„Für alle x gilt die Aussage $A(x)$.“
$\exists x : A(x)$	„Es existiert ein x, das die Aussage $A(x)$ erfüllt.“
$\exists! x : A(x)$	„Es existiert genau ein x, das $A(x)$ erfüllt.“

Existenzquantor

⚠ Wenn wir sagen ,,Es existiert ein ...“,
dann meinen wir: ,,Es existiert mindestens ein ...“.

Beispiel:

Jede natürliche Zahl ist größer als 0.

✎ $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N} : n > 0)$

Für alle n gilt: n ist natürliche Zahl ⟹ n ist positiv

Negation von Quantoren

Ein formaler Ausdruck mit Quantoren und einer nachstehenden Aussage $A(x, y, z, ...)$ sei gegeben.
Dann erhält man dessen **Negation**, indem man

- alle Allquantoren zu Existenzquantoren macht,
- alle Existenzquantoren zu Allquantoren macht und
- die Negation von $A(x, y, z, ...)$ bildet.

$$\neg\left(\forall x \exists y \forall z \forall p \exists q \forall r : A(x,y,z,p,q,r)\right)$$

Merkregel

$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \exists z \exists p \forall q \exists r : \neg A(x,y,z,p,q,r)$$

"$\neg\forall = \exists\neg$" and "$\neg\exists = \forall\neg$"

Beispiel:
„Es existiert eine natürliche Zahl n, so dass jede natürliche Zahl m mindestens so groß ist wie n."

$n, m \in \mathbb{N}$

✎ $\exists n \forall m : (n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}) \Rightarrow m \geq n$

Negation: $\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : m \geq n$

✎ $\forall n \exists m : (n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}) \Rightarrow m < n$

$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m < n$