Vorkurs Mathematik

Differentialrechnung

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

TUHH

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Ableitung elementarer Funktionen und Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
$c \quad (c \in \mathbb{R})$	0
$x^\alpha \quad (\alpha \neq 0)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
$a^x \quad (a > 0)$	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

ins.

$\sqrt{x}' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$ $\quad f$

$f(g(x))$ $\quad f \circ g$

Faktorregel: Für $c \in \mathbb{R}$

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

$(3x^2)' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$

$((3a+g)\cdot x^2)' = (3a+g) \cdot (x^2)' = (3a+g) \cdot 2x$

Summenregel:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$(x^2 + \sin(x))' = (x^2)' + \sin(x)' = 2x + \cos(x)$

Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$(x^2 \sin(x))' = (x^2)' \sin(x) + x^2 \cdot (\sin(x))' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{(x^2)' \sin(x) - x^2 \cdot (\sin(x))'}{(\sin(x))^2}$

Kettenregel:

$f(g(x))$

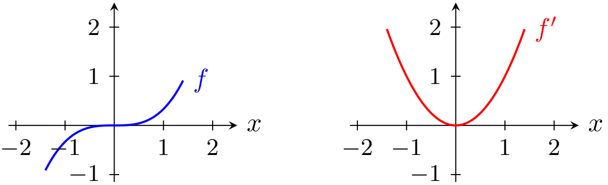
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$((\sin(x))^2)' \quad 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$

Differenzierbarkeit und Monotonie

Für $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar:

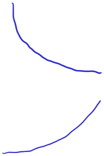
- $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in D \iff f$ monoton wachsend
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in D \implies f$ streng monoton wachsend
- $f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in D \iff f$ monoton fallend
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in D \implies f$ streng monoton fallend



⚠ Beachte, dass $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ nur hinreichende,
aber <u>nicht</u> notwendige Bedingung für strenge Monotonie ist.

Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, str. monoton steigend, aber $f'(0) = 0$

Zweite Ableitung und Konvexität/Konkavität

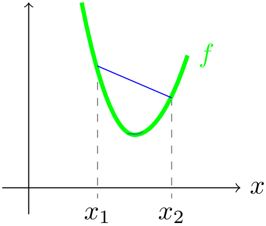


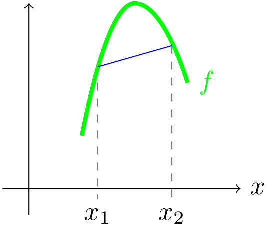
Für D Intervall, $f\colon D \to \mathbb{R}$:

- f konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ und $\lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

- f streng konvex, falls „$<$“ anstatt „$\leqslant$“
- f (streng) konkav, falls $-f$ (streng) konvex, also „$\geqslant$“ („$>$“) anstatt „$\leqslant$“ („$<$“)





Für f zweimal differenzierbar:

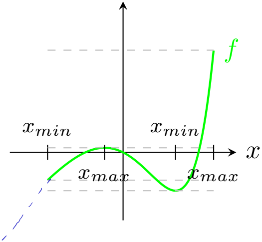
- $f''(x) \geqslant 0$ für alle $x \in D \iff f$ konvex.
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in D \implies f$ streng konvex.
- $f''(x) \leqslant 0$ für alle $x \in D \iff f$ konkav.
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in D \implies f$ streng konkav.

Lokale Extrema

Für $D \subset \mathbb{R}$ und Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$:

$x_0 \in D$ heißt

- lokales Maximum, falls es eine Umgebung U um x_0 gibt, sodass $f(x) \leqslant f(x_0)$ für alle $x \in U$
- lokales Minimum, falls es eine Umgebung U um x_0 gibt, sodass $f(x) \geqslant f(x_0)$ für alle $x \in U$
- lokales Extremum, falls es lokales Maximum oder lokales Minimum ist.



- globales Maximum, falls $f(x) \leqslant f(x_0)$ für alle $x \in D$.
- globales Minimum, falls $f(x) \geqslant f(x_0)$ für alle $x \in D$.

Umgebung um x_0 = (beliebig kleines) offenes Teilintervall von D, das x_0 enthält.

Satz

Für $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in D$ innerer Punkt:
Falls f lokales Extremum in x_0 hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

⚠ Für lokale Extrema in Randpunkten x_0 kann $f'(x_0) \neq 0$ gelten.

$x_0 \in D$ stationärer Punkt, falls $f'(x_0) = 0$.

Kriterien für Extrema

Für $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in (a,b)$ stationärer Punkt:

…mittels erster Ableitung:

Satz

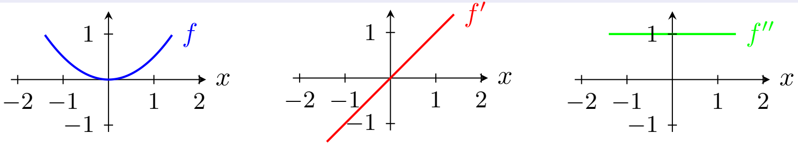
- *Falls $f'(x) \geqslant 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) \leqslant 0$ für $x > x_0$, dann hat f ein lokales Maximum in x_0.*
- *Falls $f'(x) \leqslant 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) \geqslant 0$ für $x > x_0$, dann hat f ein lokales Minimum in x_0.*

…mittels zweiter Ableitung:

Satz

Für f zweimal differenzierbar:

- *Falls $f''(x_0) < 0$, dann hat f lokales Maximum in x_0.*
- *Falls $f''(x_0) > 0$, dann hat f lokales Minimum in x_0.*



Wendepunkte

Für $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$:
f hat Wendepunkt in x_0, falls die zweite Ableitung das Vorzeichen wechselt.

Satz (Kriterien für Wendepunkte)

- *Falls f zweimal differenzierbar ist und einen Wendepunkt in x_0 hat, dann ist $f''(x_0) = 0$.*
- *Falls f dreimal differenzierbar ist, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f einen Wendepunkt in x_0.*