

Vorkurs Mathematik

Trigonometrie

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten



Was ist ein Winkel?

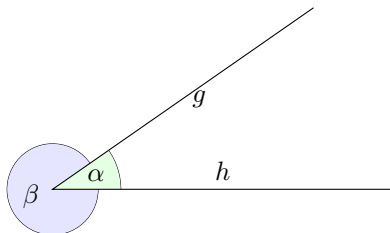


Abbildung: Winkel zwischen Halbgeraden

Winkel = Maß für eine Drehung

Winkelmaße:

- ▶ Gradmaß
- ▶ Bogenmaß

Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck beträgt stets 180° (Bogenmaß π).

Bezeichnungen von Winkeln



Vollwinkel

Halbgeraden stimmen überein

360°



gestreckter Winkel

Halbgeraden bilden eine Gerade

180°



rechter Winkel

halb so groß wie gestreckter Winkel

90°



spitzer Winkel

kleiner als rechter Winkel



stumpfer Winkel

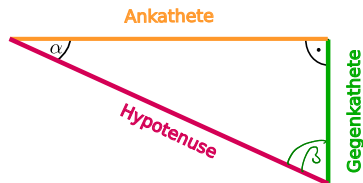
größer als rechter Winkel,
aber kleiner als gestreckter Winkel



überstumpfer Winkel

größer als gestreckter Winkel

Rechtwinkliges Dreieck



Das Verhältnis dieser Seiten zueinander definiert die **trigonometrischen Funktionen**.

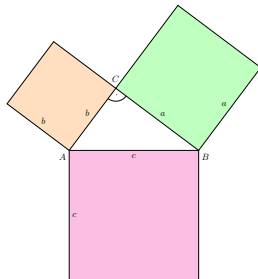
$$\sin(\alpha) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$
$$\cot(\alpha) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

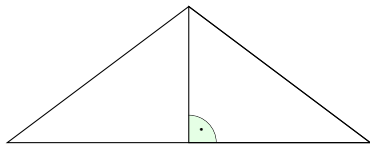
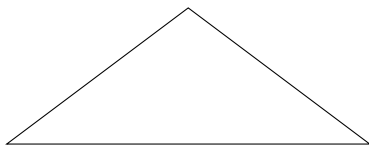


Allgemeine Dreiecke

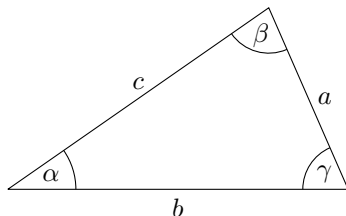
Auf Grundlage unserer Definition
können wir z.B. den Sinus eines Winkels
in einem **allgemeinen Dreieck** berechnen



rechtwinklige Hilfsdreiecke einzeichnen



Allgemeine Dreiecke



Weitere hilfreiche Resultate, um Seitenlängen oder Winkel in allgemeinen Dreiecken zu berechnen:

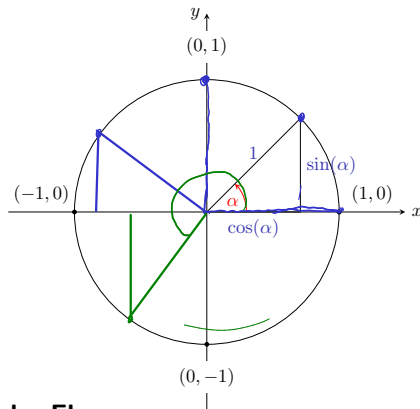
Sinussatz:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Kosinussatz:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) = c^2$$

Einheitskreis: Sinus- und Cosinuswerte



Einheitskreis in der Ebene

= Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(0,0)$

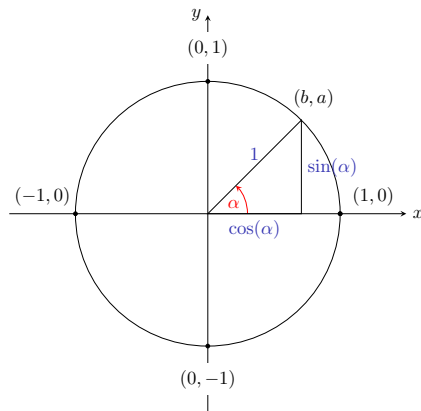
eingezeichnetes Dreieck hat einen **rechten Winkel**



Sinus- und Cosinuswerte sind ablesbar:

- ▶ Sinuswerte von α auf der y-Achse
- ▶ Cosinuswerte von α auf der x-Achse

Winkelmaß: Bogenmaß



Ausgangspunkt: Einheitskreis in der Ebene

Länge des kompletten Kreisbogens
= Umfang des Kreises mit Radius 1
= 2π

Winkel α = Länge des Kreisbogenstücks zwischen $(1, 0)$ und (b, a)

Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß

$$\frac{\text{Gradmaß des Winkels}}{360^\circ} = \frac{\text{Bogenmaß des Winkels}}{2\pi}$$

Sei α ein Winkel, der im Gradmaß die Form x° hat.

Der Winkel im Bogenmaß berechnet sich wie folgt:

$$\alpha = \frac{x}{180} \cdot \pi.$$

Winkel in Grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

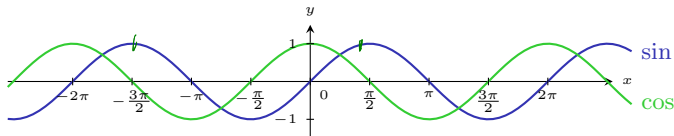
Trigonometrische Funktionen

Sinusfunktion

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Eigenschaften:

- ▶ punktsymmetrisch,
d. h. $\sin(-x) = -\sin(x)$
- ▶ Nullstellen: $\{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ periodisch mit Periode 2π ,
d. h. $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$



Kosinusfunktion

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Eigenschaften:

- ▶ symmetrisch,
d. h. $\cos(x) = \cos(-x)$
- ▶ Nullstellen: $\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ periodisch mit Periode 2π ,
d. h. $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$

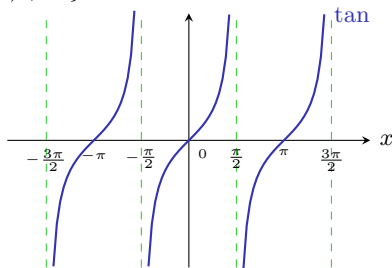
Trigonometrische Funktionen

Tangensfunktion

$$\tan: \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Eigenschaften:

- ▶ punktsymmetrisch
- ▶ periodisch mit Periode π ,
d. h. $\tan(x) = \tan(x + \pi)$
- ▶ Nullstellen: $\{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$



Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

- ▶ $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- ▶ $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- ▶ $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
- ▶ $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$
- ▶ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$