$$(3x^4+5x^3-2x^2+x+8)' = 12x^3+15x^2-4x+1$$

$$(\sin(x)\cdot x^2\cdot \sqrt{x})' = (\sin(x)\, x^2\, x^{1/2})'$$

$$= (\underbrace{\sin(x)}_{f}\ \underbrace{x^{5/2}}_{g})'$$

$$= \sin(x)'\, x^{5/2} + \sin(x)\cdot(x^{5/2})'$$

$$= \cos(x)\, x^{5/2} + \sin(x)\,\frac{5}{2}x^{3/2}$$

$$(\underbrace{\sin(x)\cos(x)}_{f}\ \underbrace{\sqrt{x}}_{g})' = \underbrace{(\sin(x)\cos(x))'}_{f'}\ \underbrace{\sqrt{x}}_{g} + \underbrace{\sin(x)\cos(x)}_{f}\ \underbrace{(\sqrt{x})'}_{g'}$$

$$= (\sin(x)'\cos(x)+\sin(x)\cos(x)')\sqrt{x}$$

$$+ \sin(x)\cdot\cos(x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= (\cos(x)^2 - \sin(x)^2)\sqrt{x}$$

$$+ \sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{x^2+7x}{\cos(x)+2}\right)' = \frac{(x^2+7x)'(\cos(x)+2) - (x^2+7x)(\cos(x)+2)'}{(\cos(x)+2)^2}$$

$$= \frac{(2x+7)(\cos(x)+2)+(x^2+7x)\sin(x)}{(\cos(x)+2)^2}$$

$$\left(\frac{2^x+\sin(x)}{3^x-\frac{1}{3}\cos(x)}\right)' = \frac{(2^x+\sin(x))'\,(3^x-\frac{1}{3}\cos(x)) - (2^x+\sin(x))\,(3^x-\frac{1}{3}\cos(x))'}{(3^x-\frac{1}{3}\cos(x))^2}$$

$$= \frac{(\log(2)2^x+\cos(x))(3^x-\frac{1}{3}\cos(x)) - (2^x+\sin(x))(\log(3)3^x + \frac{1}{3}\sin(x))}{(3^x-\frac{1}{3}\cos(x))^2}$$

$$(\underbrace{\sin(\cos(x))}_{f(g(x))})' = \underbrace{\cos}_{f'}(\underbrace{\cos(x)}_{g(x)}) \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{g'(x)}$$

mit $f(x) = \sin(x)$

und $g(x) = \cos(x)$

$$(\underbrace{\sqrt{e^x+7x}}_{f(g(x))})' = \frac{1}{2\sqrt{e^x+7x}} \cdot (e^x+7)$$

$$= \frac{1}{2}(e^x+7x)^{-1/2} \cdot (e^x+7)$$

mit $f(x) = \sqrt{x}$

und $g(x) = e^x+7x$

$$(\sqrt{3x+5}\cdot e^{2x+1})'$$

Produkt-regel $\rightarrow$ $= (\sqrt{3x+5})'\, e^{2x+1} + \sqrt{3x+5}\,(e^{2x+1})'$

Ketten-regel $\rightarrow$ $= \underbrace{\frac{1}{2}(3x+5)^{-1/2} \cdot 3}_{=(\sqrt{3x+5})' = ((3x+5)^{1/2})'} \cdot e^{2x+1} + \sqrt{3x+5}\; \underbrace{e^{2x+1} \cdot 2}_{=(e^{2x+1})'}$

$$\left(e^{3\sqrt{x}+\sin(x^2+1)}\right)' \underset{\text{Kettenregel}}{=} e^{3\sqrt{x}+\sin(x^2+1)} \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \cos(x^2+1)\cdot 2x\right)$$

Kettenregel

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

$g(x) = 3\sqrt{x} + \sin(x^2+1)$

$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \cos(x^2+1) \cdot 2x$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\left(e^{e^{\sqrt{x}}}\right)' \underset{\text{Kettenregel}}{=} e^{e^{\sqrt{x}}} \cdot \left(e^{\sqrt{x}}\right)' \underset{\text{Kettenregel}}{=} e^{e^{\sqrt{x}}} e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Kettenregel

$f(x) = e^x$

$g(x) = e^{\sqrt{x}}$

Kettenregel

$f(x) = e^x$

$g(x) = \sqrt{x}$

$$= e^{e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(e^{(3u+2t)\log(x^2) + \sqrt{x+2t}\cdot 3u}\right)'$$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{=} e^{(3u+2t)\log(x^2) + \sqrt{x+2t}\cdot 3u} \cdot \left((3u+2t)\underbrace{\log(x^2)}_{=2\log(x)} + \sqrt{x+2t}\cdot 3u\right)'$$

Kettenregel

$f(x) = e^x$

$g(x) = (3u+2t)\log(x^2) + \sqrt{x+2t} \cdot 3u$

$$= e^{\cdots} \cdot \left((3u+2t)2 \cdot \frac{1}{x} + 3u \frac{1}{2\sqrt{x+2t}} \cdot 1 \right)$$

$$\left(e^{e^{e^{e^{\sqrt{x}}}}} \right)' = e^{e^{e^{e^{\sqrt{x}}}}} \quad e^{e^{e^{\sqrt{x}}}} \quad e^{e^{\sqrt{x}}} \quad e^{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt{3x + \sqrt{2x + \sqrt{x}}} \right)'$$

$$f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1$$

Gesucht: Monotoniebereiche

$$f'(x) = 9x^2 - 6x + 1$$

Nullstellen ber.: $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$+ \qquad +$

$\frac{1}{3}$

Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-2x^2}$$ Gesucht: Monotoniebereiche

$$x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-2x^2) - x^3(-4x)}{(1-2x^2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 6x^4 + 4x^4}{(1-2x^2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 2x^4}{(1-2x^2)^2}$$

Da ein Quadrat im Nenner steht (das immer positiv ist), ist nur der Zähler für das Vorzeichen des Bruchs relevant.

Nullstellen ber.:

$$3x^2 - 2x^4 = 0$$

$$x^2(3-2x^2) = 0$$

$$3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Nullstellen bei: $0, -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}$

$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Bereiche:

$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$: z.B. streng mon. wachsend (falls f' pos)

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$:

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \infty\right)$:

Kurvendiskussion

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$

b) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^2}$, $x \neq -2$

Gesucht jeweils:

- Monotoniebereiche
- Krümmungsbereiche
- Extrema
- Wendestellen
- Skizze des Funktionsgraphen

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

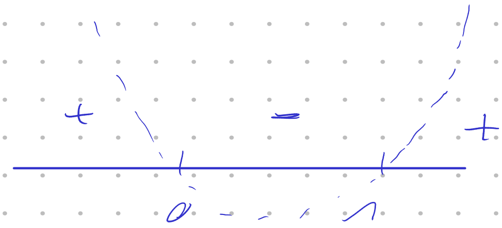
$f''(x) = 12x - 6$

Nullstellen der ersten Abl.:

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x-1) = 0$$

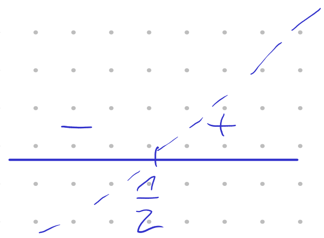
$$x = 0 \lor x = 1$$



f ist auf $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$ streng mon. wachsend und auf $(0,1)$ streng mon. fallend

Nullstellen der zweiten Abl.:

$$12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



f ist auf $(-\infty, \frac{1}{2})$ streng konkav und auf $(\frac{1}{2}, \infty)$ streng konvex.

Aus der Ber. der Monotonieber. folgt, dass f an der Stelle 0 ein lok. Maximum und an der Stelle 1 ein lok. Min. besitzt.

Aus der Ber. der Krümmungsber. folgt, dass f an der Stelle $\frac{1}{2}$ einen Wendepunkt besitzt.