Vorkurs Mathematik

Beweise

Dr. Simon Campese, Dr. Dennis Clemens, Dr. Sonja Otten

TUHH INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Inhalt

Was ist ein Beweis?

Definition (Beweis)

logische Argumentationsketten, die ausgehend von einer gegebenen Voraussetzung eine Behauptung verifizieren (oder widerlegen).

⚠ Solange eine Aussage nicht bewiesen ist, kann es sein, dass sie falsch ist. Egal durch wie viele Beispiele sie gestützt ist.

Beispiel: Fermat-Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0$

Vermutung von Fermat (1637): Alle F_n sind Primzahlen.
Widerlegt von Euler (1732): Er fand mit 641 einen echten Teiler von

$$F_5 = 4.294.967.297.$$

Herangehensweise:

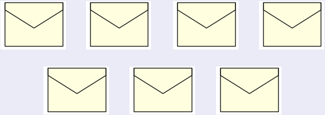
1. Fragestellung verstehen: relevante Definitionen kennen
2. Beweismethode auswählen: Kenntnis ähnlicher Fragestellungen?
3. Beweis durchführen
4. Überprüfung: Ausgangsfragestellung beantwortet, alle Zwischenschritte korrekt?

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

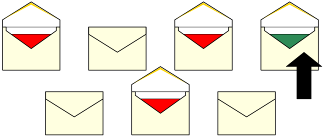
	beweisen	**widerlegen**
Existenzaussage $\exists x : A(x)$	**?**	**?**
Für-alle-Aussage $\forall x : A(x)$	**?**	**?**

Beispiel: Existenzaussage nachweisen

Unter den folgenden Briefen
existiert einer mit einer grünen Karte.



Beweis:



Wir haben einen Brief mit einer grünen Karte gefunden.
Also ist die Aussage nachgewiesen.
Dabei ist es egal, ob noch weitere solche Briefe existieren!

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

1. Fall: Existenzaussagen nachweisen

Angenommen, wir haben eine Aussage der Form

„Es existiert ein Objekt x, sodass die Eigenschaft $A(x)$ erfüllt ist."

$$✎\ \exists x : A(x)$$

Um solch eine Aussage zu zeigen, genügt ein **Beispiel**.

Begründung: Die Aussage verlangt nur nach einem Objekt,
das die gewünschte Eigenschaft $A(x)$ hat.

⚠ **Achtung:**

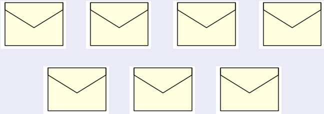
Wenn wir sagen „Es existiert ein ...",
dann meinen wir: „Es existiert <u>mindestens</u> ein ...".
Es könnten also auch zwei, drei oder mehrere existieren.

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

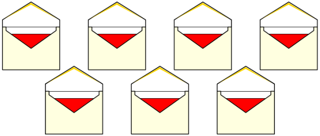
	beweisen	**widerlegen**
Existenzaussage $\exists x : A(x)$	**Beispiel**: Zeige, dass ein x die Eigenschaft $A(x)$ hat.	**?**
Für-alle-Aussage $\forall x : A(x)$	**?**	**?**

Beispiel: Für-alle-Aussagen nachweisen

Alle der folgenden Briefe enthalten eine rote Karte.



Beweis:



Erst wenn man für jeden Brief weiß, dass eine rote Karte enthalten ist, ist die Aussage bewiesen! Nur ein paar Briefe zu öffnen reicht nicht.

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

2. Fall: Für-alle-Aussagen nachweisen

Angenommen, wir haben eine Aussage der Form

„Alle Objekte x haben die Eigenschaft $A(x)$."

✎ $\forall x : A(x)$

Um solch eine Aussage zu zeigen, genügt ein Beispiel NICHT.
Ein **allgemeingültiger Beweis** ist nötig!

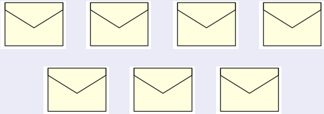
Begründung: Zu wissen, dass ein Objekt die Eigenschaft $A(x)$ hat,
heißt noch lange nicht,
dass alle Objekte diese Eigenschaft haben.

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

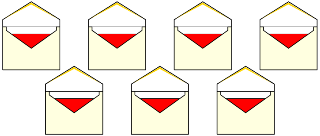
	beweisen	**widerlegen**
Existenzaussage $\exists x : A(x)$	**Beispiel**: Zeige, dass ein x die Eigenschaft $A(x)$ hat.	**?**
Für-alle-Aussage $\forall x : A(x)$	**allgemeingültiger Beweis**: Zeige, dass alle x die Eigenschaft $A(x)$ haben.	**?**

Beispiel: Existenzaussage widerlegen

Unter den folgenden Briefen
existiert einer mit einer grünen Karte.



Beweis:



Erst wenn man für jeden Brief weiß, dass eine rote Karte enthalten ist,
ist die Aussage widerlegt! Nur ein paar Briefe zu öffnen reicht dann nicht.

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

3. Fall: Existenzaussagen widerlegen

Angenommen, wir haben eine Aussage der Form

„Es existiert ein Objekt x, sodass die Eigenschaft $A(x)$ erfüllt ist."

✎ $\exists x : A(x)$

Solch eine Aussage zu widerlegen, bedeutet das **Gegenteil** zu **beweisen**.
Begründung: Entweder eine Aussage oder ihr Gegenteil ist wahr.

Das Gegenteil ist eine Für-alle-Aussage:

„Alle Objekte x haben nicht die Eigenschaft $A(x)$."

✎ $\forall x : \neg A(x)$

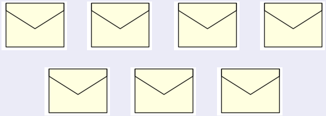
Um dieses zu beweisen wird ein **allgemeingültiger Beweis** gebraucht.

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

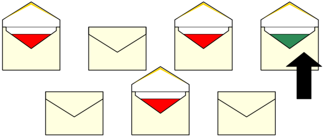
	beweisen	**widerlegen**
Existenzaussage $\exists x : A(x)$	**Beispiel**: Zeige, dass ein x die Eigenschaft $A(x)$ hat.	**allgemeingültiger Beweis**: Zeige, dass alle x die Eigenschaft $A(x)$ <u>nicht</u> haben.
Für-alle-Aussage $\forall x : A(x)$	**allgemeingültiger Beweis**: Zeige, dass alle x die Eigenschaft $A(x)$ haben.	**?**

Beispiel: Für-alle-Aussagen widerlegen

Alle der folgenden Briefe
enthalten eine rote Karte.



Beweis:



Wir haben einen Brief mit einer grünen Karte gefunden.
Also ist die Aussage widerlegt.
Dabei ist es egal, ob noch weitere solche Briefe existieren!

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

4. Fall: Für-alle-Aussagen widerlegen

Angenommen, wir haben eine Aussage der Form

„Alle Objekte x haben die Eigenschaft $A(x)$."

✎ $\forall x : A(x)$

Solch eine Aussage zu widerlegen, bedeutet das **Gegenteil** zu **beweisen**.
Begründung: Entweder eine Aussage oder ihr Gegenteil ist wahr.

Das Gegenteil ist eine Existenzaussage:

„Es existiert ein Objekt x, das nicht die Eigenschaft $A(x)$ hat."

✎ $\exists x : \neg A(x)$

Es genügt also ein **(Gegen-)Beispiel**.

Beweise: Wann genügt ein Beispiel und wann nicht?

	beweisen	**widerlegen**
Existenzaussage $\exists x : A(x)$	**Beispiel**: Zeige, dass ein x die Eigenschaft $A(x)$ hat.	**allgemeingültiger Beweis**: Zeige, dass alle x die Eigenschaft $A(x)$ <u>nicht</u> haben.
Für-alle-Aussage $\forall x : A(x)$	**allgemeingültiger Beweis**: Zeige, dass alle x die Eigenschaft $A(x)$ haben.	**Gegenbeispiel**: Zeige, dass ein x die Eigenschaft $A(x)$ <u>nicht</u> hat.

Beispiele

Es gibt natürliche Zahlen a, b und c, so dass $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Beweis: (Existenzaussage mit Beispiel nachweisen.)
Man betrachte beispielsweise $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$.
Dann ist $a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 = c^2$.

Für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 - 8x + 17 \geqslant 0$.

Beobachtung:
Setzen wir $x = 1$ ein, so erhalten wir $1^2 - 8 \cdot 1 + 17 = 10 \geqslant 0$.✓
Setzen wir $x = 2$ ein, so erhalten wir $2^2 - 8 \cdot 2 + 17 = 5 \geqslant 0$.✓
Setzen wir $x = 3$ ein, so erhalten wir $3^2 - 8 \cdot 3 + 17 = 2 \geqslant 0$.✓
Aber warum stimmt die Ungleichung für jedes $x \in \mathbb{R}$?

Beweis: (Für-alle-Aussage mit allgemeingültigen Beweis nachweisen.)

Sei x eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt: $x^2 - 8x + 17 = (x - 4)^2 + 1$.
Dieser Ausdruck ist mindestens 0, weil das Quadrat $(x - 4)^2$ als auch der Summand 1 nicht negativ sind.

Beweisprinzipien

Direkter Beweis

- Gegeben: A
- Gesucht: B
- Zeige $A \implies B$, typischerweise mittels $A \implies A_1 \implies A_2 \implies \ldots \implies A_n \implies B$.

Indirekter Beweis mittels Kontraposition

- Gegeben: A
- Gesucht: B
- Zeige $A \implies B$, indem Sie $\neg B \implies \neg A$ zeigen.

Indirekter Beweis mittels Widerspruch

- Zeige A, indem Sie $\neg A$ widerlegen.

Vollständige Induktion

Beweisprinzip: Vollständige Induktion

Ziel: Eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant n_0$ beweisen, wobei $n_0 \in \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion

Man kann die Aussage $A(n)$ für alle $n \geqslant n_0$ wie folgt beweisen:

- **Induktionsanfang:** Zeige, dass $A(n_0)$ wahr ist.
- **Induktionsschluss:** Zeige, aus der Aussage $A(n)$ für ein beliebiges $n \geqslant n_0$ folgt die Aussage $A(n+1)$.

  Kurz: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Bezeichnungen:
- $A(n)$ als Induktionsvoraussetzung,
- $A(n+1)$ als Induktionsbehauptung.

Dominoeffekt